

Dodatkowe zadania z Analizy Funkcjonalnej - seria 4

1. a) Wykazać, że każdy ograniczony operator liniowy $T : \ell_\infty \rightarrow c_0$ jest postaci $Tx = (x_n^*(x))_{n \geq 1}$ dla pewnego ciągu $(x_n^*)_{n \geq 1} \subset \ell_\infty^*$ zbieżnego słabo* do zera.

b) Wykazać, że $T : \ell_\infty \rightarrow c_0$ jest zwarty wtedy i tylko wtedy, gdy odpowiadający ciąg $(x_n^*)_{n \geq 1}$ zbiega do zera w normie w ℓ_∞^* .

2. Przestrzeń ℓ_1 ma tzw. własność Schura: każdy ciąg słabo zbieżny w ℓ_1 jest zbieżny w normie. Korzystając z tej własności, wykazać, że

a) dowolna nieskończenie wymiarowa podprzestrzeń przestrzeni ℓ_1 nie jest refleksywna.

b) dowolny ciągły liniowy operator $T : \ell_2 \rightarrow \ell_1$ jest zwarty.

3. Niech X i Y będą dwiema przestrzeniami Banacha oraz niech $A \in \mathcal{B}(X, Y)$. Pokazać, że operator A jest różnowartościowy wtedy i tylko wtedy, gdy $A^*(Y^*)$ jest słabo*-gęstym podzbiorem w X^* .

4. Wykazać, że jeśli V jest domkniętą podprzestrzenią $L_2[0, 1]$ oraz $V \subseteq C[0, 1]$, to $\dim V < \infty$.