

### Dodatkowe zadania z Analizy Funkcjonalnej - seria 3

**1.** Niech  $Y$  będzie domkniętą podprzestrzenią przestrzeni Banacha  $X$  oraz niech  $T : Y \rightarrow \ell^\infty$  będzie ograniczonym liniowym operatorem. Wykazać, że istnieje operator  $\tilde{T} : X \rightarrow \ell^\infty$  rozszerzający  $T$  o tej samej normie.

**2.** Wykazać, że  $c_0$  nie jest przestrzenią dualną do żadnej przestrzeni Banacha.

**3.** Niech  $f, f_1, f_2, \dots, f_n$  będą funkcjonalami liniowymi na przestrzeni liniowej  $X$ . Wykazać, że  $f$  jest kombinacją liniową  $f_1, f_2, \dots, f_n$  wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\bigcap_{k=1}^n \ker f_k \subset \ker f.$$

**4.** Niech  $X$  będzie przestrzenią Banacha. Wykazać, że następujące dwa warunki są równoważne:

a)  $X$  jest refleksywna;

b) dla każdego zstępującego ciągu  $\{C_n\}_{n \geq 1}$  niepustych, domkniętych, wypukłych i ograniczonych podzbiorów  $X$  mamy

$$\bigcap_{n \geq 1} C_n \neq \emptyset.$$