

Dodatkowe zadania z Analizy Funkcjonalnej - seria 2

1. Dla lokalnie całkowalnej funkcji $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, określamy

$$Tf(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(y) dy, \quad x > 0.$$

Wykazać, że dla każdego $1 < p < \infty$, T jest operatorem ograniczonym na $L^p(0, \infty)$ i $\|T\|_{L^p(0, \infty) \rightarrow L^p(0, \infty)} = \frac{p}{p-1}$.

Wskazówka: Aby wykazać, że $\|T\|_{L^p(0, \infty) \rightarrow L^p(0, \infty)} \leq \frac{p}{p-1}$, użyć całkowania przez części i nierówności Höldera. W celu wykazania nierówności przeciwnej, rozważyć funkcję $f(x) = x^{-1/p} \chi_{(\varepsilon, \varepsilon^{-1})}(x)$, gdzie $\varepsilon > 0$.

2. Załóżmy, że $T : \ell_1 \rightarrow \ell_2$ jest liniowym, ciągłym, różnowartościowym przekształceniem. Udowodnić, że obraz $T(\ell_1)$ nie jest domkniętą podprzestrzenią ℓ_2 .

3. Niech $\{u_n\}_{n \geq 1}$ będzie ortonormalnym ciągiem w przestrzeni Hilberta $L^2([0, 1])$. Pokazać, że jeśli istnieje liczba $M > 0$ taka, że $|u_n(t)| \leq M$ dla prawie wszystkich $t \in [0, 1]$, oraz jeśli $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n u_n(t)$ jest zbieżny dla prawie wszystkich $t \in T = [0, 1]$, to wtedy $\lambda_n \rightarrow 0$.

4. Załóżmy, że X jest przestrzenią unormowaną oraz $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$ jest przekształceniem liniowym. Wykazać, że φ jest ciągłym funkcjonałem wtedy i tylko wtedy, gdy jego jądro $\text{Ker } \varphi$ jest podprzestrzenią domkniętą X .