

Dodatkowe zadania z Analizy Funkcjonalnej - seria 1

1. Załóżmy, że $(X, \|\cdot\|)$ jest przestrzenią unormowaną oraz $x_1, x_2, \dots, x_m \in X$ jest ciągiem liniowo niezależnych wektorów. Wykazać, że istnieje $\varepsilon > 0$ o następującej własności: jeśli $y_1, y_2, \dots, y_m \in X$ spełniają warunek $\|y_j\| < \varepsilon$ dla wszystkich j , to $x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_m + y_m$ są liniowo niezależne.

2. Niech X będzie przestrzenią unormowaną, a $C \subseteq X$ będzie zbiorem wypukłym takim, że $\text{int } C \neq \emptyset$ (taki zbiór nazywany jest *ciałem wypukłym*). Wykazać, że

$$\overline{C} = \overline{\text{int } C} \quad \text{oraz} \quad \text{int } C = \text{int } \overline{C}.$$

3. Rozstrzygnąć, czy istnieje niezerowa miara borelowska μ ze znakiem na $\mathbb{R}$ oraz zbiór borelowski $A \subset \mathbb{R}$ takie, że $\mu(A \cap I) = \frac{1}{2}\mu(I)$ dla dowolnego przedziału $I \subset \mathbb{R}$.

4. Niech X będzie domkniętą podprzestrzenią $L^1(\Omega)$ spełniającą

$$X \subset \bigcup_{1 < q \leq \infty} L^q(\Omega).$$

Wykazać, że istnieje $p > 1$ takie, że $X \subset L^p(\Omega)$.