

Zadania z Analizy Funkcjonalnej - seria 9

1. Załóżmy, że $T : X \rightarrow Y$ jest operatorem liniowym, zaś $S : Y \rightarrow Z$ jest operatorem liniowym, ciągłym i różnowartościowym o tej własności, że złożenie ST jest ciągłe. Dowieść, że T jest operatorem ciągłym.

2. Załóżmy, że $T : H \rightarrow H$ jest liniowym operatorem na pewnej przestrzeni Hilberta H , spełniającym warunek $\langle x, Ty \rangle = \langle Tx, y \rangle$ dla wszystkich $x, y \in H$. Wykazać, że T jest operatorem ograniczonym.

3. Niech X będzie przestrzenią Banacha, a $T : X \rightarrow C[0, 1]$ przekształceniem liniowym. Wykazać, że T jest ciągłe wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego $t \in [0, 1]$ istnieje stała $C(t) < \infty$ o tej własności, że

$$\left| \int_0^t T(x)(s) ds \right| \leq C(t) \|x\|$$

dla wszystkich $x \in X$.

4. Niech X i Y będą dwoma przestrzeniami Banacha, a $T : X \rightarrow Y$ będzie ciągłym liniowym operatorem „na”. Wykazać, że istnieje taka stała $M > 0$, że dla danego $y \in Y$, możemy znaleźć $x \in X$ spełniające nierówność $\|x\|_X \leq M \|y\|_Y$ oraz równość $T(x) = y$.

5. Na przestrzeni $C[0, 1]$, oprócz normy $\|\cdot\|_\infty$, rozpatrujemy inną normę $\|\cdot\|$, spełniającą warunek: jeżeli $u_n \xrightarrow{\|\cdot\|} u$, to $u_n(t) \rightarrow u(t)$ dla każdego $t \in [0, 1]$. Dowieść, że jeśli $(C[0, 1], \|\cdot\|)$ jest przestrzenią Banacha, to normy $\|\cdot\|_\infty$ oraz $\|\cdot\|$ są równoważne.

6. Określamy operator liniowy $T : c_{00} \rightarrow c_{00}$ wzorem

$$T(x) = \left(x_1, \frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, \dots, \frac{x_n}{n}, \dots \right), \quad x = (x_n)_{n \geq 1} \in c_{00}.$$

Dowieść, że T jest ograniczony, różnowartościowy i „na”, ale T^{-1} nie jest ciągły. Czy przeczy to twierdzeniu o operatorze otwartym?

7. Niech $(X, \|\cdot\|_X)$ i $(Y, \|\cdot\|_Y)$ będą przestrzeniami Banacha, a $T : X \rightarrow Y$ będzie operatorem liniowym „na”, dla którego istnieje skończona stała c spełniająca

$$\|T(x)\|_Y \geq c \|x\|_X$$

dla wszystkich $x \in X$. Dowieść, że T jest operatorem ograniczonym.

8. Niech X będzie ośrodkową przestrzenią Banacha, a $\{y_n\}_{n=1}^\infty$ będzie przeliczalnym gęstym podzbiorem kuli jednostkowej w X . Definiujemy $T : \ell_1 \rightarrow X$ wzorem $Tx = \sum_{n=1}^\infty x_n y_n$. Dowieść, że T jest operatorem ograniczonym i „na”.

9. Niech X będzie przestrzenią Banacha, a $Y \subset X$ domkniętą podprzestrzenią. Powiemy, że Y ma dopełnienie, jeśli istnieje domknięta podprzestrzeń $Z \subset X$, dla której przekształcenie $\Phi : Y \oplus Z \rightarrow X$, $\Phi(y, z) = y + z$, jest izomorfizmem.

a) Dowieść, że Y ma dopełnienie wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje domknięta podprzestrzeń $Z \subset X$ spełniająca $Y \cap Z = \{0\}$ oraz $\text{lin}(Y, Z) = X$.

b) Dowieść, że dowolna domknięta podprzestrzeń Y przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$ ma dopełnienie.

c) Dowieść, że jeśli Y jest skończonego wymiaru, to ma dopełnienie.