

Zadania z Analizy Funkcjonalnej - seria 8

1. Wykazać, że jeśli $1 < p < \infty$ i ciąg $(f_n)_{n \geq 1} \subset L_p[0, 1]$ spełnia $\|f_n\|_p \leq 1$ i $\lambda_1(\{x : f_n(x) \neq 0\}) \rightarrow 0$, to $(f_n)_{n \geq 1}$ zbiega słabo do zera. Czy jest to prawdą dla $p = 1$?

2. Wykazać, że domknięta kula jednostkowa $\{f \in C[0, 1] : \|f\|_\infty \leq 1\}$ nie jest słabo zwarta.

3. Wykazać, że ciąg wektorów $x^{(n)} = (x_k^{(n)})_{k=1}^\infty$ zbiega słabo do zera w ℓ_p , $1 < p < \infty$, wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\sup_n \|x^{(n)}\|_p < \infty \quad \text{oraz} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_k^{(n)} = 0 \quad \text{dla wszystkich } k.$$

Czy charakterystyka ta jest prawdziwa dla ℓ_1 ? A dla c_0 ?

4. Wykazać, że ciąg $e_n = (0, 0, \dots, 0, 1, 0, 0, \dots)$ (jedynek na n -tym miejscu), $n = 1, 2, \dots$, zbiega słabo* w ℓ_1 , ale nie zbiega słabo w ℓ_1 .

5. Wykazać, że $C[0, 1]$ jest gęste w $L_\infty(0, 1)$ w słabej* topologii.

6. Załóżmy, że X jest przestrzenią Banacha, a $(x_n)_{n \geq 1} \subset X$ zbiega słabo do $x \in X$. Wykazać, że $\|x\| \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|x_n\|$. Podobnie, udowodnić, że jeśli $(\varphi_n)_{n \geq 1} \subset X^*$ zbiega słabo* do $\varphi \in X^*$, to $\|\varphi\| \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|\varphi_n\|$.

7. Niech X będzie refleksywną przestrzenią Banacha, a Y będzie przestrzenią unormowaną. Przypuśćmy, że $T : X \rightarrow Y$ jest takim operatorem liniowym, że jeśli ciąg $(x_n)_{n \geq 1}$ zbiega słabo do 0 w X , to $(T(x_n))_{n \geq 1}$ zbiega słabo do 0 w Y . Udowodnić, że T jest ograniczony.

8. Rozważmy zbiór $A = \left\{ f \in L_3(0, 1) : \int_0^1 f = 1, \int_0^1 |f|^3 \leq 2, \operatorname{esssup} |f| \leq 5 \right\}$ oraz operator (nieliniowy) $\mathcal{J}(f) = \int_0^1 f^2 dx$ działający na $L^3(0, 1)$. Wykazać, że istnieje funkcja h minimalizująca funkcjonal $\mathcal{J}$ na A , tzn. spełniająca

$$\mathcal{J}(h) = \inf_{f \in A} \mathcal{J}(f).$$

9. a) Załóżmy, że E jest wypukłym podzbiorem przestrzeni Banacha X . Dowieść, że słabe domknięcie E pokrywa się z domknięciem E w normie.

b) Załóżmy, że $(x_n)_{n \geq 1}$ jest ciągiem wektorów z przestrzeni Banacha X , zbieżnym słabo do x . Wykazać, że istnieje ciąg $(y_n)_{n \geq 1} \subset X$ zbieżny w normie do x , taki, że dla każdego n , y_n jest kombinacją wypukłą skończenie wielu x_k .