

Zadania z Analizy Funkcjonalnej - seria 6

1. Wykazać, że jeśli X_0 jest domkniętą podprzestrzenią przestrzeni unormowanej X oraz $x \in X \setminus X_0$, to istnieje funkcjonal $\varphi \in X^*$ zerujący się na X_0 taki, że $\varphi(x) = 1$.

2. Niech F będzie podprzestrzenią przestrzeni Banacha X . Wykazać, że dla dowolnego $x \in X$,

$$\text{dist}(x, F) = \sup\{|\varphi(x)| : \varphi \in X^*, \|\varphi\| \leq 1, \varphi|_F = 0\}.$$

3. (a) Niech X będzie przestrzenią Banacha oraz $x \in X$ będzie wektorem o normie 1. Udowodnić, że $\Delta(x) := \{\varphi \in X^* : \varphi(x) = 1 = \|\varphi\|\}$ jest niepustym, domkniętym zbiorem wypukłym.

(b) Podać przykłady $x \in \ell^1$ takie, że $\Delta(x)$ jest jednopunktowe, n -wymiarowe, nieskończenie wymiarowe.

(c) Opisać wszystkie $x \in c_0$ takie, że $\Delta(x)$ jest jednopunktowe.

4. Przestrzeń $C[0, 1]$ można traktować jako domkniętą podprzestrzeń $L^\infty[0, 1]$. Funkcjonał $\delta_x(f) := f(x)$ jest ciągłym funkcjonalem o normie 1 na $C[0, 1]$, zatem z twierdzenia Hahna-Banacha można go rozszerzyć do funkcjonala φ_x na $L^\infty[0, 1]$ o normie 1. Wykazać, że nie istnieje funkcja $g \in L^1[0, 1]$ taka, że $\varphi_x(f) = \int_0^1 f(s)g(s)ds$. Udowodnić, że jeśli $f \in L^\infty[0, 1]$ jest taka, że $f = 0$ na zbiorze $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$, to $\varphi_x(f) = 0$.

5. Mówimy, że przestrzeń X się izometrycznie wkłada w przestrzeń Y , jeśli istnieje liniowe przekształcenie $T : X \rightarrow Y$ takie, że $\|Tx\| = \|x\|$ dla każdego $x \in X$. Wykazać, że każda ośrodkowa przestrzeń Banacha się wkłada izometrycznie w ℓ^∞ .

6. Wykazać, że ośrodkowość przestrzeni X^* implikuje ośrodkowość przestrzeni X . Czy odwrotna implikacja jest prawdziwa?

7. Niech A i B będą rozłącznymi niepustymi wypukłymi podzbiorami rzeczywistej przestrzeni Banacha X takimi, że A jest domknięty, a B jest zwarty. Wykazać, że istnieje funkcjonal $\varphi \in X^*$ taki, że $\sup_{x \in A} \varphi(x) < \inf_{x \in B} \varphi(x)$.

8. Załóżmy, że X jest przestrzenią Banacha, a $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ jest ciągłą funkcją wypukłą. Wykazać, że dla każdego $x_0 \in X$ istnieje funkcjonal podpierający f w punkcie x_0 , tzn. taki $\varphi \in X^*$, że $f(x) \geq f(x_0) + \varphi(x - x_0)$ dla wszystkich x .