

Zadania z Analizy Funkcjonalnej - seria 5

1. Znaleźć wielomian w stopnia 2 dla którego wartość całki

$$\int_{-1}^1 |t^4 - w(t)|^2 dt$$

jest najmniejsza.

2. Wykazać, że układ Rademachera $f_n := \text{sgn}(\sin(2^n \pi x))$, $n = 1, 2, \dots$, jest układem ortogonalnym w $L_2[0, 1]$. Czy jest to układ zupełny?

3. Niech $(P_n)_{n=0}^\infty$ będzie układem wielomianów Legendre'a, danym wzorem

$$P_n(t) = \frac{d^n}{dt^n} (t^2 - 1)^n, \quad t \in [-1, 1], \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

- a) Wykazać, że $(P_n)_{n=0}^\infty$ jest układem ortogonalnym w przestrzeni $L_2[-1, 1]$. Jak należy go znormalizować, aby uzyskać układ ortonormalny?

- b) Czy jest to układ zupełny?

4. Niech H będzie przestrzenią Hilberta $l^2(\mathbb{N})$ oraz

$$V := \{x \in l^2(\mathbb{N}) : x_1 + 2x_3 = 0 \text{ i } -2x_1 + x_2 + x_3 = 0\}.$$

- a) Znaleźć podprzestrzeń $V^\perp$.

- b) Niech $P_1, P_2 : H \rightarrow H$ będą rzutami ortogonalnymi w H , odpowiednio na V oraz na $V^\perp$. Znaleźć $P_1 a$ i $P_2 a$ dla $a = (2^{-n})_{n=1}^\infty$.

5. Niech M będzie domkniętą podprzestrzenią przestrzeni Hilberta H , $P = P_M$ będzie rzutem ortogonalnym na M oraz T będzie operatorem ograniczonym na H . Dowieść, że M oraz $M^\perp$ są przestrzeniami niezmienniczymi dla T wtedy i tylko wtedy, gdy $TP = PT$.

6. Załóżmy, że M jest domkniętą podprzestrzenią przestrzeni Hilberta H . Wykazać, nie korzystając z twierdzenia Hahna-Banacha, że dowolny funkcjonal $\varphi \in M^*$ rozszerza się do pewnego funkcjonału $\psi \in H^*$ spełniającego warunek $\|\psi\|_{H^*} = \|\varphi\|_{M^*}$.

7. Załóżmy, że H jest przestrzenią Hilberta, a operator $T \in \mathcal{B}(H)$ spełnia $\langle Tx, x \rangle \geq \|x\|^2$ dla wszystkich $x \in H$. Wykazać, że $T : H \rightarrow H$ jest izomorfizmem.