

Zadania z Analizy Funkcjonalnej - seria 4

1. Wykazać, że $(\ell_p, \|\cdot\|_p)$ jest przestrzenią Hilberta wtedy i tylko wtedy, gdy $p = 2$.

2. Niech

$$M = \left\{ f \in C[0, 1] : \int_0^{1/2} f(t) dt = \int_{1/2}^1 f(t) dt \right\}.$$

- a) Wykazać, że M jest domkniętą podprzestrzenią $C[0, 1]$.
- b) Dla $g(t) = t$, obliczyć $\text{dist}(g, M)$.
- c) Czy istnieje funkcja $f \in M$ taka, że $\text{dist}(g, M) = \|f - g\|_\infty$?
- d) Opisać $C[0, 1]/M$.

3. Niech

$$M = \{f \in L_2[-1, 1] : f(x) = f(-x) \text{ dla p.w. } x\}.$$

Znaleźć $M^\perp$ oraz wzór na rzut ortogonalny na M .

4. a) Niech

$$M = \left\{ f \in L_2[-1, 1] : \int_{-1}^1 x f(x) dx = \int_0^1 f(x) dx = 0 \right\}.$$

Wyznaczyć $M^\perp$, $P_M g$ oraz $\text{dist}(g, M)$, gdzie $g \in L_2[-1, 1]$ dana jest wzorem $g(x) = x^2 + x^3$.

b) Czy dla dowolnej funkcji $g \in L_2[-1, 1]$ istnieje element f przestrzeni

$$N = \left\{ f \in L_2[-1, 1] : \int_{-1}^1 x f(x) dx = 0, \int_{-1}^1 \left| \frac{f(x)}{x} \right| dx < \infty \right\},$$

dla którego $\|f - g\|_{L_2[-1, 1]} = \text{dist}(g, N)$?

5. Niech V_n będzie podprzestrzenią $L^2[0, 1]$ składającą się z funkcji stałych na przedziałach $[k/n, (k+1)/n)$, $k = 0, 1, \dots, n-1$.

- (a) Znaleźć $V_n^\perp$
- (b) Wyznaczyć rzut ortogonalny f na V_n .
- (c) Wyznaczyć odległość $f(t) = t$ w $L^2[0, 1]$ od V_n .

6. Załóżmy, że M jest domkniętą podprzestrzenią przestrzeni Hilberta H . Dowieść, że $H/M \simeq M^\perp$.

7. Załóżmy, że $H = \ell_2$ oraz $M = c_{00}$. Sprawdzić, że M jest podprzestrzenią H oraz $M \subset (M^\perp)^\perp$, $M \neq (M^\perp)^\perp$.

8. Znaleźć wielomian w stopnia 2 dla którego wartość całki

$$\int_{-1}^1 |t^4 - w(t)|^2 dt$$

jest najmniejsza.