

Zadania z Analizy Funkcjonalnej - seria 3

1. Znaleźć normę przekształcenia $Tf(x) = xf(x)$ z $L_p[-1, 1]$ w $L_1[-1, 1]$, gdzie $1 \leq p \leq \infty$ jest ustalonym parametrem.

2. Określamy operator $T : \ell_1 \rightarrow c_0$ wzorem $T(x)_n = \sum_{j=n}^{\infty} x_j$, $n = 1, 2, \dots$. Wykazać, że T jest operatorem ciągłym i obliczyć jego normę.

3. Niech $Tf(x) := \int_0^x f(y) dy$. Wykazać, że T jest ciągłym przekształceniem z $L_p[0, 1]$ w $L_q[0, 1]$ dla dowolnych $1 \leq p, q \leq \infty$.

4. Wykazać, że $\varphi(f) = \int_0^{1/2} f(x) dx - \int_{1/2}^1 f(x) dx - f(1)$ jest ciągłym funkcjonałem na $C[0, 1]$ i policzyć jego normę.

5. Niech $X = \{f \in C[0, 1] : f(t) = 2f(1-t), t \in [0, 1/2]\}$. Czy X z normą supremum jest przestrzenią Banacha? Udowodnić, że następujące funkcjonały są ciągłe na X i wyznaczyć ich normy:

a) $\varphi(f) = f(1/4)$.

b) $\varphi(f) = f(3/4)$.

c) $\varphi(f) = \int_0^{1/2} f(x) dx$.

6. Wykazać, że jeśli Y jest skończenie wymiarową podprzestrzenią przestrzeni unormowanej $(X, \|\cdot\|)$, to Y jest podprzestrzenią domkniętą.

7. Rozważamy podprzestrzenie Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 przestrzeni $C[0, 1]$. Wykazać, że Y_j są domknięte, zidentyfikować $C[0, 1]/Y_j$ oraz podać normy w tych przestrzeniach ilorazowych.

$$Y_1 = \{f \in C[0, 1] : f(1) = 0\},$$

$$Y_2 = \left\{f \in C[0, 1] : \int_0^1 f = f\left(\frac{1}{2}\right)\right\},$$

$$Y_3 = \left\{f \in C[0, 1] : \int_0^1 f = f\left(\frac{1}{2}\right), f(1) = 0\right\},$$

$$Y_4 = \left\{f \in C[0, 1] : \int_0^1 f = f\left(\frac{1}{2}\right) \quad \text{oraz} \quad f(x) = 0 \text{ dla } x \geq \frac{3}{4}\right\}.$$

8. Niech $1 \leq p \leq \infty$ i określmy $Y = \{x \in \ell_p : x_2 = x_4 = x_6 = \dots = 0\}$. Dowieść, że Y jest domkniętą podprzestrzenią ℓ_p oraz $\ell_p/Y \simeq \ell_p$.

9. Przypomnijmy, że c_0 jest domkniętą podprzestrzenią ℓ_∞ .

a) Dowieść, że c_0 jest ośrodkowa, zaś ℓ_∞ nie jest ośrodkowa.

b) Wykazać, że ℓ_∞/c_0 nie jest ośrodkowa.