

Zadania z Analizy Funkcjonalnej - seria 2

1. Niech $x = (x_k)_{k=1}^n$. Wykazać, że
 - a) $\|x\|_q \leq \|x\|_p \leq n^{1/p-1/q} \|x\|_q$ dla $1 \leq p < q$.
 - b) $\lim_{p \rightarrow \infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty$.
 - c) Czy stałe w a) są optymalne? Jakie zawierania dla kul jednostkowych w ℓ_p^n wynikają z a)?
2. Niech $x = (x_k)_{k=1}^\infty$ oraz $1 \leq p < q$.
 - a) Wykazać, że $\|x\|_q \leq \|x\|_p$.
 - b) Znaleźć wektor x taki, że $\|x\|_p = \infty$ oraz $\|x\|_q < \infty$.
 - c) Czy zawsze $\lim_{p \rightarrow \infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty$? Jeśli nie, to kiedy tak jest?
3. Wykazać, że zbiór

$$\left\{ x = (x_k)_{k=1}^\infty : \sum_{k=1}^\infty |x_k| \leq 1 \right\}$$

jest domkniętym wypukłym podzbiorem ℓ_2 o pustym wnętrzu. Czy jest to zbiór zwarty?

4. Niech $(X, \mathcal{F}, \mu)$ będzie przestrzenią z miarą skończoną μ oraz f będzie funkcją mierzalną na X . Udowodnić, że dla $1 \leq p < q$,

- a) $\|f\|_p \leq \mu(X)^{1/p-1/q} \|f\|_q$, w szczególności $\|f\|_p \leq \|f\|_q$ gdy $\mu(X) = 1$.
- b) Wykazać, że $\lim_{p \rightarrow \infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty$.

5. Załóżmy, że $1 \leq p_0 < p < p_1$ są ustalonymi parametrami oraz $(X, \mathcal{F}, \mu)$ jest przestrzenią mierzalną. Dowieść, że dowolną funkcję $f \in L_p(X, \mathcal{F}, \mu)$ można przedstawić w postaci $f = f_0 + f_1$ dla pewnych $f_0 \in L_{p_0}(X, \mathcal{F}, \mu)$ oraz $f_1 \in L_{p_1}(X, \mathcal{F}, \mu)$.

6. Wyznaczyć $|\mu|$ i obliczyć $\|\mu\|$ dla następujących miar ze znakiem na $[0, 1]$:

- (i) $\mu = \sum_{n=1}^\infty a_n \delta_{1/n}$,
- (ii) $\mu(A) = \int_A f(x) dx$, $f \in L_1([0, 1])$.

7. Załóżmy, że μ jest miarą zespoloną na X oraz $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ są funkcjami mierzalnymi. Wykazać, że dla dowolnego mierzalnego zbioru $A \subset \mathbb{R}$ mamy

$$|\mu(f \in A) - \mu(g \in A)| \leq |\mu|(f \neq g).$$

8. Załóżmy, że $(X, \mathcal{F}, \mu)$ jest przestrzenią z miarą oraz $L^p = L^p(X)$.

a) Wykazać nierówności Clarksona:

$$\begin{aligned} & \cdot \text{ dla } 2 \leq p < \infty, \quad \left\| \frac{f+g}{2} \right\|_p^p + \left\| \frac{f-g}{2} \right\|_p^p \leq \frac{1}{2} (\|f\|_p^p + \|g\|_p^p), \\ & \cdot \text{ dla } 1 < p \leq 2, \quad \left\| \frac{f+g}{2} \right\|_p^q + \left\| \frac{f-g}{2} \right\|_p^q \leq \left(\frac{1}{2} (\|f\|_p^p + \|g\|_p^p) \right)^{q/p}, \end{aligned}$$

gdzie $q = \frac{p}{p-1}$.

b) Przestrzeń Banacha $(X, \|\cdot\|)$ jest jednostajnie wypukła, jeśli dla każdego $0 < \varepsilon < 2$ istnieje taka $\delta > 0$, że jeśli $\|x\| = \|y\| = 1$ oraz $\|x - y\| > \varepsilon$, to $\left\| \frac{x+y}{2} \right\| \leq 1 - \delta$.

Wywnioskować z a), dla $1 < p < \infty$ przestrzeń L^p jest jednostajnie wypukła.