

Zadania z Analizy Funkcjonalnej - seria 13

1. a) Czy istnieje funkcja $f \in L_1(\mathbb{R})$ dla której $\hat{f} = \chi_{[-1,1]}$ lub $\hat{f} = \cos$?
b) Załóżmy, że f jest jednostajnie ciągła, całkowalna i dąży do zera w $\pm\infty$. Czy wynika stąd, że $\hat{f} \in L_1(\mathbb{R})$?

2. Niech $f(x) = \sin x/x$. Sprawdzić, że $f \in L_2(\mathbb{R})$ oraz wykazać, że $\hat{f} = \pi\chi_{[-1,1]}$.

3. a) Dla $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, wyznaczyć $y \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ spełniające równanie $-y'' + y = f$.
b) Dla $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, wykazać, że istnieje $y \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ spełniające $-\Delta y + y = f$.

4. Wyznaczyć $f \in L_1(\mathbb{R})$ spełniającą równanie całkowe

$$f(x) + \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{f(y)}{(x-y)^2 + 1} dy = \frac{1}{x^2 + 4} + \frac{1}{x^2 + 1}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

5. Rozwiązać równanie Laplace'a na górnej półpłaszczyźnie: dla $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, wyznaczyć $u : \mathbb{R} \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ spełniającą $\Delta u = 0$, $u(x, 0) = g$ i $\lim_{y \rightarrow \infty} u(x, y) = 0$.

6. (Zasada nieoznaczoności Heisenberga) Udowodnić, że dla $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ spełniającej $\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = 1$ zachodzi

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |x|^2 |f(x)|^2 dx \right) \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^2 |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi \right) \geq \frac{n^2}{4} \cdot (2\pi)^n.$$

7. Udowodnić, że dla $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ zachodzi

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi) e^{-|\varepsilon \xi|^2} d\xi = (2\pi)^n f(0).$$

8. Załóżmy, że f jest funkcją na $\mathbb{R}^n$ o nośniku zawartym w kuli jednostkowej o środku w zerze, spełniającą $|f(\xi)| \leq (1 + |\xi|)^{-\alpha}$ dla wszystkich $\xi \in \mathbb{R}^n$, gdzie $\alpha > n/2$ jest pewną stałą. Wykazać, że dla dowolnej funkcji $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ zachodzi nierówność

$$|u * f(x)| \leq C \left(\int_{|x-y| < 1} u^2(y) dy \right)^{1/2}, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

$$\text{Transformata Fouriera } \hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-i\langle \xi, x \rangle} dx$$

	Funkcja	Transformata
delta Diraca	δ_a	$e^{-i\langle \xi, a \rangle}$
funkcja wykładnicza	$e^{i\langle \xi, a \rangle}$	$(2\pi)^n \delta_a$
funkcja gaussowska	$e^{- x ^2/2}$	$(2\pi)^{n/2} e^{- \xi ^2/2}$
jednostronna funkcja wykładnicza ($n = 1$)	$e^{-\lambda x} \chi_{(0, \infty)}(x)$	$\frac{1}{\lambda + i\xi}$
dwustronna funkcja wykładnicza ($n = 1$)	$e^{-\lambda x }$	$\frac{2\lambda}{\lambda^2 + \xi^2}$
rozkład Cauchy'ego ($n = 1$)	$\frac{\lambda}{\lambda^2 + x^2}$	$\pi e^{-\lambda \xi }$
funkcja charakterystyczna odcinka ($n = 1$)	$\chi_{[a, b]}(x)$	$\frac{e^{-ia\xi} - e^{-ib\xi}}{i\xi}$
pochodna funkcji	$\frac{\partial f(x)}{\partial x_j}$	$i\xi_j \hat{f}(\xi)$
pochodna transformaty	$-ix_j f(x)$	$\frac{\partial \hat{f}(\xi)}{\partial \xi_j}$
przesunięcie względem x	$f(x - a)$	$e^{-i\langle \xi, a \rangle} \hat{f}(\xi)$
przesunięcie względem ξ	$e^{i\langle a, x \rangle} f(x)$	$\hat{f}(\xi - a)$
jednokładność	$f(ax)$	$\hat{f}(x/a)/ a ^n$
splot	$f * g(x)$	$\hat{f}(\xi) \hat{g}(\xi)$