

Zadania z Analizy Funkcjonalnej - seria 12

1. Operator $T : L_2(\mathbb{R}) \rightarrow L_2(\mathbb{R})$ jest dany wzorem $(Tf)(x) = \operatorname{sgn}(x)f(x+1)$. Wyznaczyć sprzężenie Hilbertowskie T^* . Czy T jest samosprzężony, unitarny, normalny, nieujemny?

2. Wykazać, że jeśli T jest operatorem liniowym na zespolonej przestrzeni Hilberta spełniającym $\langle Tx, x \rangle \in \mathbb{R}$ dla wszystkich x , to T jest samosprzężony.

3. Załóżmy, że $T \in \mathcal{B}(H)$ jest operatorem normalnym.

- (i) Dowieść, że $\|Tx\| = \|T^*x\|$ dla dowolnego $x \in H$.
- (ii) Dowieść, że $\operatorname{Ker}(T) = \operatorname{Ker}(T^*)$.
- (iii) Wykazać, że $T(H) = T^*(H)$.

4. Załóżmy, że A jest zwartym samosprzężonym operatorem na przestrzeni Hilberta H . Dowieść, że dla dowolnego $n \geq 2$ istnieje zwarty operator B na H taki, że $A = B^n$.

5. Niech $A : H \rightarrow H$ będzie zwartym różnowartościowym operatorem na przestrzeni Hilberta H .

- (a) Wykazać, że jeśli A jest samosprzężony, to istnieje ciąg operatorów A_n taki, że $A_n A x \rightarrow x$ dla każdego $x \in H$.
- (b) Wykazać, że to samo twierdzenie jest prawdziwe dla dowolnego zwartego operatora A . (Wskazówka: rozważyć operator A^*A .)
- (c) Czy można tak dobrać A_n , aby $A_n A \rightarrow I$ w normie?

6. Załóżmy, że $k \in L_2([0, 1]^2)$ spełnia warunek $k(x, y) = \overline{k(y, x)}$ dla $x, y \in [0, 1]$. Określamy

$$Kf(x) = \int_0^1 k(x, y)f(y) dy.$$

Wykazać, że

- (i) K jest zwartym operatorem samosprzężonym;
- (ii) istnieje baza ortonormalna $(\varphi_n)_{n \geq 1}$ przestrzeni $L_2[0, 1]$ oraz liczby rzeczywiste $\lambda_n \rightarrow 0$ takie, że $K\varphi_n = \lambda_n \varphi_n$;
- (iii) zachodzi równość

$$k(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \varphi_n(x) \varphi_n(y),$$

przy czym szereg jest zbieżny w $L_2([0, 1]^2)$.

- (iv) Czy dla każdego $\lambda \in \mathbb{R}$ i każdego $g \in L_2[0, 1]$ istnieje rozwiązanie f równania $Tf - \lambda f = g$?

7. Dany jest zwarty samosprzężony operator T , którego jedynymi niezerowymi wartościami własnymi są 2 oraz 3. Udowodnić, że $T^3 - 5T^2 + 6T = 0$.

8. Załóżmy, że T jest operatorem unitarnym. Dowieść, że spektrum $\sigma(T)$ jest zawarte w okręgu jednostkowym $\mathbb{T} = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\}$.

9. Rozważmy równanie

$$x''(t) = f(t) \quad \text{dla } t \in (0, 1), \quad x(0) = x(\pi) = 0.$$

Dla zadanego $f \in L_2(0, 1)$, spróbować wyznaczyć rozwiązanie $x \in L_2(0, 1)$ powyższego problemu. Czy to rozwiązanie jest jednoznaczne?