

## Zadania z Analizy Funkcjonalnej - seria 11

1. Niech  $1 \leq p \leq \infty$  oraz niech  $L$  i  $R$  oznaczają odpowiednio lewostronny i prawostronny operator przesunięcia na zespolonej przestrzeni Banacha  $\ell_p$ , tzn.

$$L(x_1, x_2, \dots) = (x_2, x_3, \dots), \quad R(x_1, x_2, \dots) = (0, x_1, x_2, \dots).$$

Wykazać, że

- (i)  $\sigma_p(L) = D$ ;
- (ii)  $\sigma_p(R) = \emptyset$ ;
- (iii)  $\sigma(L) = \sigma(R) = \text{cl } D$ ,

gdzie  $D$  oznacza otwarty dysk jednostkowy.

2. Niech  $W \in \mathcal{B}(\ell_2)$  będzie ważonym operatorem przesunięcia na  $\ell^2$ , zdefiniowanym przez

$$W(x_1, x_2, \dots) = (0, x_1, \frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, \dots).$$

Wykazać, że  $W$  jest operatorem zwartym,  $\sigma_p(W) = \emptyset$  oraz  $\sigma(W) = \{0\}$ . Znaleźć nietrywialną domkniętą podprzestrzeń niezmienniczą dla  $W$ , tzn. domkniętą podprzestrzeń  $M \neq \{0\}$ ,  $M \neq \ell_2$ , spełniającą  $W(M) \subseteq M$ .

3. Niech  $X$  będzie przestrzenią Banacha oraz niech  $P \in \mathcal{L}(X)$  będzie rzutem na właściwą podprzestrzeń  $Y \subset X$ , tzn.  $P: X \rightarrow Y$  jest operatorem „na” oraz  $P^2 = P$ . Wykazać, że  $\sigma(P) = \sigma_p(P) = \{0, 1\}$  oraz dla  $\lambda \neq 0, 1$  zachodzi

$$(P - \lambda I)^{-1} = \lambda^{-1}(1 - \lambda)^{-1} P - \lambda^{-1} I.$$

4. Niech  $K \subset \mathbb{F}$  będzie dowolnym niepustym zwartym podzbiorem. Wykazać, że istnieje operator  $T \in \mathcal{B}(\ell_2)$  taki, że  $\sigma(T) = K$ .

5. Wykazać, że jeśli  $\lambda \in \sigma(T)$ , to  $\lambda^n \in \sigma(T^n)$  dla  $n = 1, 2, \dots$

6. Wykazać, że operator Volterra  $T: L_2[0, 1] \rightarrow L_2[0, 1]$  dany wzorem  $Tf(x) = \int_0^x f(y)dy$  jest zwarty i spełnia  $\sigma_p(T) = \emptyset$ ,  $\sigma(T) = \{0\}$ .

7. Operator  $T: L_2(\mathbb{R}) \rightarrow L_2(\mathbb{R})$  jest dany wzorem  $(Tf)(x) = \text{sgn}(x)f(x+1)$ . Wyznaczyć sprzężenie Hilbertowskie  $T^*$ . Czy  $T$  jest samosprężony, unitarny, normalny, nieujemny?

8. Podać przykład operatora liniowego ciągłego  $T$  na przestrzeni Hilberta, który nie jest unitarny, ale

- (i)  $TT^* = I$ ,
- (ii)  $T^*T = I$ ,
- (iii)  $\|Tx\| = \|x\|$  dla wszystkich  $x$ .

Czy takie operatory istnieją w przestrzeni skończonego wymiaru?