

Zadania z Analizy Funkcjonalnej - seria 10

1. Określmy $T : L_2(\mathbb{R}) \rightarrow L_2(\mathbb{R})$ wzorem $Tf(x) = \int_{x+1}^x f(y) dy$. Wykazać, że T jest ciągły oraz wyznaczyć T^* . Czy T jest zwarty?

2. Niech $T : L_p[0, 1] \rightarrow L_p[0, 1]$, $1 \leq p < \infty$, będzie określony wzorem $(Tf)(x) := \int_0^1 k(x, y)f(y) dy$ dla pewnej funkcji ograniczonej mierzalnej k . Wykazać, że operator T jest zwarty. Czy T jest odwracalny? Wyznaczyć T^* .

3. Określmy $T : l_1 \rightarrow c_0$ wzorem $T((x_n)_{n=1}^\infty) = (\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k)_{n=1}^\infty$. Wyznaczyć T^* . Czy T jest zwarty?

4. Niech $(e_n)_{n=0}^\infty$ będzie kanoniczną bazą l_p , $1 \leq p < \infty$. Wykazać, że operator liniowy $T : l_p \rightarrow l_p$ taki, że $Te_n = a_n e_n$ jest zwarty wtedy i tylko wtedy, gdy $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

5. a) Wykazać, że każdy operator zwarty przekształca ciągi słabo zbieżne na ciągi zbieżne w normie.

b) Wykazać, że istnieje operator niezwarty przekształcający ciągi słabo zbieżne na ciągi zbieżne w normie.

c) Załóżmy, że przestrzeń X jest refleksywna i ośrodkowa, zaś T jest operatorem ciągłym na X przekształcającym ciągi słabo zbieżne na ciągi zbieżne w normie. Wykazać, że T jest zwarty.

6. Załóżmy, że $T : X \rightarrow X$ jest operatorem zwartym na przestrzeni Banacha X oraz $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

a) Wykazać, że obraz operatora $T - \lambda I$ jest domknięty.

b) Wykazać, że $T - \lambda I$ jest różnowartościowy wtedy i tylko wtedy, gdy jest „na”.

7. Załóżmy, że $T : X \rightarrow Y$ jest operatorem zwartym między przestrzeniami Banacha X, Y . Dowieść, że jeśli X jest refleksywna, to $T(\overline{B_X})$ jest zbiorem zwartym.