

Zadania z Analizy Funkcjonalnej - seria 1

1. Załóżmy, że $(X, \|\cdot\|)$ jest przestrzenią unormowaną.

a) Wykazać, że $f(x) = \|x\|$ jest funkcją ciągłą na X (w topologii generowanej przez normę).

b) Wykazać, że każda kula w przestrzeni unormowanej jest wypukła.

c) Korzystając z b) wykazać, że $\|\cdot\|_p$ nie jest normą na $L_p[0, 1]$ gdy $p \in (0, 1)$.

2. Rozważmy zbiór

$$X = \left\{ (x_1, x_2, \dots) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \sup_{n \geq 1} n^3 |x_n| < \infty \right\},$$

wyposażony w normę $\|x\| = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$. Czy $(X, \|\cdot\|)$ jest przestrzenią Banacha?

3. Niech $C^1[0, 1]$ będzie przestrzenią funkcji ciągłych z $[0, 1]$ w $\mathbb{R}$, które są różniczkowalne na $(0, 1)$ i których pochodna przedłuża się do funkcji ciągłej na $[0, 1]$. Rozważmy normy

(i) $\|f\|_{\infty}$;

(ii) $\int_0^1 |f|$;

(iii) $\|f\|_{\infty} + \|f'\|_{\infty}$;

(iv) $|f(0)| + \|f'\|_{\infty}$;

(v) $\|f\|_{\infty} + \sup_{x \in (0, 1)} |xf'(x)|$.

Które z tych norm wprowadzają na $C^1[0, 1]$ strukturę przestrzeni Banacha?

4. Dowieść, że przestrzeń unormowana $(X, \|\cdot\|)$ jest przestrzenią Banacha wtedy i tylko wtedy, gdy każdy szereg bezwzględnie zbieżny jest zbieżny (tzn. jeśli $\sum_{n=0}^{\infty} \|x_n\| < \infty$, to ciąg $(\sum_{n=0}^N x_n)_{N \geq 0}$ zbiega w X).

5. Wykazać, że wszystkie normy na $\mathbb{R}^n$ są równoważne. Wskazać dwie nierównoważne normy na przestrzeni ciągów ograniczonych.

6. Wykazać, że na przestrzeni ciągów o wyrazach rzeczywistych, topologia dyskretna oraz topologia produktowa nie są normowalne.

7. a) Załóżmy, że X jest przestrzenią unormowaną, a $Y \subseteq X$ jest podprzestrzenią o niepustym wnętrzu. Dowieść, że $Y = X$.

b) Niech X będzie przestrzenią Banacha, a $\{V_n\}_{n \geq 1}$ - ciągiem domkniętych podprzestrzeni liniowych X takich, że $X = \bigcup_{n \geq 1} V_n$. Pokazać, że istnieje takie $n_0 \geq 1$, że $X = V_{n_0}$.

c) Wywnioskować z b), że przestrzeni wielomianów o współczynnikach zespolonych nie można wyposażyć w strukturę przestrzeni Banacha.