1 Seria 1 - rozwiązania Macieja Markiewicza

1.1 Zad.1

Nie. Najprostszym przykładem będzie wzięcie $A = X$ albo A - ściągalna spójna składowa X. Jako mniej trywialny przykład możemy wziąć $X \subset \mathbb{R}^2$ zdefiniowane jako sumę dysków $B((-1,0),1)$ i $B((1,0),1)$, $A = [-1,1] \times \{0\}$ i $a_0 = (1,0)$. $X \backslash A$ i $X \backslash a_0$ nie mogą być homotopijnie równoważne, ponieważ mają równą liczbę spójnych składowych.

1.2 Zad.2

Korzystamy z własności przedłużania homotopii. Niech $\gamma : I \to Y$ będzie takie, że $\gamma(0) = g(x_0)$ i $\gamma(1) = y_0$. Możemy tą drogę traktować jako homotopię między $g|_{x_0}$ i przekształceniem $x_0 \mapsto y_0$. Wobec tego istnieje homotopia H przekształceń z X do Y taka że $H(x_0, t) = \gamma(t)$. Przekształcenie $f(x) = H(x, 1)$ będzie wtedy szukaną funkcją.

1.3 Zad.3

Niech $H : X \times I \to X$ będzie silną homotopijną retrakcją X do x_0. Weźmy $A = H^{-1}(U)$. A jest zbiorem otwartym, ponieważ H jest ciągłe. Wiemy, że $x_0 \times I$ zawiera się w A ponieważ obraz tego zbioru to x_0, jako że H jest silną homotopijną retrakcją. Teraz, każdy punkt $x_0 \times \{t\}$ ma otoczenie otwarte zawierające się w A postaci $V_t \times I_t$ gdzie V_t jest otoczeniem x_0 w X, a I_i - otoczeniem t w I. Rozpatrzmy pokrycie I przez zbiory I_t. Ponieważ I jest przestrzenią zwartą, możemy wybrać skończone podpokrycie $I_{t_1}, ..., I_{t_k}$. Teraz, rozpatrzmy $V = \cap V_{t_i}$, gdzie t_i to wybrany wcześniej skonczony zbiór indeksów. V jest podzbiorem otwartym jako że jest pzrecięciem skończonej liczby zbiorów otwartych i $V \times I$ jest otoczeniem $x_0 \times I$ zawierającym się w U. Ale oznacza to dokładnie, że $H|_{V \times I}$ jest homotopią ściągającą V do punktu wewnątrz U, czyli dokładnie szukanym otoczeniem.

1.4 Zad.4

Zdefiniujmy najpierw odwzorowania:

$$F_0(x, t, s) = H_0(x, t) \circ H_1(x, st)$$

$$F_1(x, t, s) = H_0(x, (1-s)t) \circ H_1(x, t)$$

Zauważmy teraz, że:

- $F_0(x, t, 0) = H_0(x, t)$, ponieważ $H_1(x, 0) = x$.
- $F_1(x, t, 1) = H_1(x, t)$, ponieważ $H_0(x, 0) = x$.

- dla $x \in A$ mamy $F_i(x,t,s) = x$, ponieważ obydwa H_i zachowują punkty z A.
- $F_0(x,t,1) = F_1(x,t,0)$.

Pierwsze trzy punkty mówią nam, że F_i są silnymi homotopijnymi retrakcjami i zgadzają się z zadanymi homotopiami na odpowiednich końcach. Czwarty podpunk pozwala nam teraz skleić F_i wzdłuż współrzędnej s analogicznie do sklejania dróg - bierzemy F które wzdłuż s najpierw przechodzi przez F_0 a potem F_1. Ponieważ to F jest ciągłe jako złożenie przekształceń ciągłych, jest ono szukaną homotopią.

2 Seria 2- rozwiązania Macieja Markiewicza

2.1 Zad.1

Weźmy sobie ten torus jako leżący w $\mathbb{R}^3$ i sparametryzujmy go jako zbiór

$$((cos(\theta)+2)cos(\phi), (cos(\theta)+2)sin(\phi), sin(\phi)),$$

gdzie $\theta, \phi \in [0, 2\pi]$. Innymi słowy powstaje on poprzez obrót okręgu o środku w $2, 0)$ i promieniu 1 wokół osi z, gdzie ϕ parametryzuje wyjściowy okrąg, a θ - obrót wokół osi. Rozpatrzmy teraz przekształcenie zgniatające okrąg $\phi = \pi$ do środka, zadane w taki sposób, że

$$((cos(\theta)+2)cos(\phi), (cos(\theta)+2)sin(\phi), sin(\phi)) \mapsto ((cos(\theta)+1)cos(\phi), (cos(\theta)+1)sin(\phi), sin(\phi)).$$

Ale teraz, ten zbiór jest homeomorficzny ze sferą S^2 na której utożsamiliśmy punkty $(0,0,1)$ i $(0,0,-1)$. Dwa punkty to po prostu sfera S^0 i korzystając z zadania 2.3 otrzymujemy tezę.

2.2 Zad.2

Wyobraźmy sobie ten wypełniony torus jako zanurzony w $S^3 = \mathbb{R}^3 \cup \infty$ oraz niech $A = S^3 \backslash T$ będzie jego dopełnieniem, gdzie $T = D^2 \times S^1$. Zauważmy, że $S^3/A \simeq D^2 \times S^1/S^1 \times S^1$ ponieważ mają wspólny brzeg a punkty we wnętrzu A nie wpływają na topologię ilorazu. Ale teraz $A \simeq T$, a T jest homotopijnie równoważne z S^1, ponieważ D^2 jest ściągalne. Ostatecznie dostajemy więc, że ten iloraz jest homotopijnie równoważny z S^3/S^1 i korzystając z zadania 2.3 dostajemy tezę.

2.3 Zad.3

Weźmy $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ zdefiniowane jako $\{(x_1, ..., x_{n+1}) | x_1^2 + ... + x_{n+1}^2 = 1\}$ oraz $S^k \subset S^n$ zdefiniowane przez $x_{k+2} = x_{k+3} = ... = x_{n+1} = 0$. Teraz, wiemy że ściągnięcie S^k do punktu jest równoważne (z dokładnością do homotopijnej równoważności) wklejeniu stożka na S^k. Jako ten stożek weźmiemy $D^{k+1} = \{(x_1, ..., x_{k+1}, 0, ..., 0) | x_1^2 + ... + x_{k+1}^2 \leq 1\}$. Teraz, rozpatrzmy zbiór $D_{k+1} = \{(x_1, ..., x_{k+1}, 0, ..., 0, x_n) | \sum x_i = 1\}$. Jest to ściągalny podzbiór S^n o brzegu S^k. Oprócz tego, $S^n \cup D_{k+1}, D'_{k+1})$ stanowi parę borsuka, ponieważ ten dysk posiada *mapping cylinder neighborhood* (por. Hatcher przykład 0.15). Zgniecenie go do punktu będzie więc homotopijną równoważnością. Ale teraz, $S^n / D'_{k+1} \approx S^n$ oraz $D_{k+1} / D_{k+1} \cap D'_{k+1} \approx S^{k+1}$, tak więc ostatecznie mamy szukany fakt, że $S^n / S^k \approx S^n \vee S^{k+1}$

2.4 Zad.4

Nie. Możemy wziąć $X = x_0$ i $Y = \{\frac{1}{k} \times [0,1] | k \in \mathbb{N}\} \cup \{0\} \times [0,1] \cup [0,1] \times \{0\}$ będzie znanym nam grzebieniem. Jest to przestrzeń ściągalna, ale nie jest ściągalna do punktu $(0,1)$ relatywnie do tego punktu. Wobec tego, możemy wziąć funkcję f przeprowadzającą jedyny punkt X na ten właśnie punkt. Teraz, $(0,1) = y_0 \in Y$ nie może być parą Borsuka, ponieważ jeżeli byłoby, to y_0 byłoby silnym homotopijnym retraktem Y, ponieważ jest homotopijnie równoważne z Y.

2.5 Zad.5

Weźmy $X \subset \mathbb{C}$ zdefiniowane jako $X = \{e^{2\pi i q} | q \in \mathbb{Q}\}$. Dla dowolnego punktu $x_0 = e^{2\pi i q_0}$ rozpatrzmy włożenie $X \subset X_{q_0}$, gdzie $X_{q_0} = X \cup \{t x_0 | t \in [1,2]\}$. Wtedy homotopia $H(x_0, s) = (1+s)x_0$ nie będzie się przedłużać do homotopii całego X.

3 Seria 3- rozwiązania Macieja Markiewicza

3.1 Zad.1

Rozpatrzmy najpierw przestrzeń $X \cup M_f$, to jest $X \cup A \times [0,1] \cup B$ gdzie punkt $(a,1)$ jest zidentyfikowany z $f(a)$ i punkt $(a,0)$ jest utożsamiony z punktem $a \in A \subset X$. Teraz, ta przestrzeń jest z jednej strony homotopijnie równoważna z $X \cup_f B$ ponieważ możemy ściągnąć $A \times I$ do A poprzez homotopię. Teraz weźmy $g : B \to A$ będące homotopijną odwrotnością f i niech H będzie homotopią łączącą identyczność na A na dole i $g \circ f$ na górze. Możemy teraz wziąć funkcję $r : X \cup M_f \to X \cup A \times [0,1]$ zdefiniowaną przez:

- $r(b) = (g(b), 1)$
- $r(a,t) = H(a,t)$
- $r(x,0) = x$

Jest to retrakcja ktora zachowuje ponadto punkty należące do X. Ponieważ g jest homotopijną równoważnością, to r też nią będzie, pozostaje tylko zdeformować $X \cup A \times [0,1]$ i robimy to ściągając odcinki do punków na dole i zachowując punkty w X. Ostatecznie pokazaliśmy więc istnienie przestrzeni, której zarówno X jak i $X \cup_f B$ są silnymi retraktami deformacyjnymi - ale na mocy wniosku 0.21 z Hatchera oznacza to że są one homotopijnie równoważne.

3.2 Zad. 2

Niech $\gamma(t)$ będzie zadaną drogą. Wtedy żądaną homotopię możemy zapisać poprzez funkcję $H(t,s) = (1-s)\gamma(t) + s\frac{\gamma(t)}{|\gamma(t)|}$.

3.3 Zad.3

Korzystamy z tego, że dla drogi ω istnieje droga $\omega^{-1}(t) = \omega(1-t)$ która stanowi jej odwrotność z dokładnością do homotopii. Wobec tego:
$1 \implies 2$: Domnażamy obydwie strony z lewej strony przez ω^{-1} i wykorzystujemy fakt, że $\omega^{-1}\omega \sim \omega_{x_1}$.
$2 \implies 1$: Domnażamy obydwie strony przez ω z lewej strony i wykorzystujemy fakt, że $\gamma\omega_{x_1} \sim \gamma$ dla dowolnego γ. Równoważność 1 i 3 dowodzimy w analogiczny sposób, domnażając tylko homotopijne równoważności z prawej strony.

3.4 Zad.4

Nazwijmy to przyporządkowanie Φ. Musimy pokazać, że $\Phi([\alpha_1 * \alpha_2], [\beta_1 * \beta_2]) = [\alpha_1 \times \beta_1] * [\alpha_2 \times \beta_2]$. Sprawdzimy tą równość na reprezentantach klas homotopii, gdzie $\tilde{\Phi}$ jest przekształceniem zdefiniowanych na pętlach:

- Jeśli $t \leq \frac{1}{2}$, to $\tilde{\Phi}(\alpha_1 * \alpha_2, \beta_1 * \beta_2)(t) = ((\alpha_1 * \alpha_2) \times (\beta_1 * \beta_2))(t) = (\alpha_1 * \alpha_2)(t) \times (\beta_1 * \beta_2)(t) = \alpha_1(2t) \times \beta_1(2t)$
- Jeśli $t \geq \frac{1}{2}$, to $\tilde{\Phi}(\alpha_1 * \alpha_2, \beta_1 * \beta_2)(t) = ((\alpha_1 * \alpha_2) \times (\beta_1 * \beta_2))(t) = (\alpha_1 * \alpha_2)(t) \times (\beta_1 * \beta_2)(t) = \alpha_2(2t-1) \times \beta_2(2t-1)$

Składając więc te dwie równości dostajemy więc $\tilde{\Phi}(\alpha_1 * \alpha_2, \beta_1 * \beta_2) = (\alpha_1 \times \beta_1) * (\alpha_2 \times \beta_2)$. Ale to oznacza, że taka sama równość zachodzi dla klas homotopii pętli, czyli Φ jest homomorfizmem.
Phi będzie izomorfizmem, ponieważ istnieje przekształcenie odwrotne zdefiniowane przez $\gamma(t) = \gamma_X(t) \times \gamma_Y(t) \mapsto (\gamma_X, \gamma_Y)$ indukowane przez rzutowania na współrzędne.

3.5 Zad.5

Jeżeli ta równość zachodzi dla dowolnych η, τ i dla dowolnych x, y, to możemy wziąć $x = y$ i $\tau = \omega_x$. Wtedy otrzymujemy $h_{[\eta],[\eta]} = h_{[\omega_x],[\omega_x]}$ dla dowolnego η. Ale $h_{[\omega_x],[\omega_x]}$ jest idenycznością, bo ω_x jest elementem neutralnym. Tak więc przekształcenie $[\xi] \mapsto [\eta][\xi][\eta]^{-1}$ jest identycznością, a to oznacza dokładnie że $[\eta]$ jest przemienne ze wszystkimi elementami. Ale ponieważ η jest dowolnie wybranym elementem, to cała ta grupa jest przemienna.
W drugą stronę - mając elementy η, τ możemy napisać dla dowolnego $[\xi]$, dopisując w środku element neutralny:

$$[\eta][\xi][\eta]^{-1} = [\eta][\xi][\tau]^{-1}[\tau][\eta]^{-1}$$

Ale teraz zarówno $[\eta][\xi][\tau]^{-1}$ jak i $[\tau][\eta]^{-1}$ są klasami homotopii pętli zaczynających się w x, są więc z naszego założenia przemienne. Dostajemy więc równość:

$$[\eta][\xi][\tau]^{-1}[\tau][\eta]^{-1} = [\tau][\eta]^{-1}[\eta][\xi][\tau]^{-1}$$

Ale to po skróceniu $[\eta]^{-1}[\eta] = \omega_y$ daje nam dokładnie szukaną równość $h_{[\eta],[\eta]}$ i $h_{[\tau],[\tau]}$.

4 seria

4.1. Podać przyklad lokalnego homeomorfizmu, ktory nie jest nakryciem. Odpowiedź: Niech $X = \mathbb{R} \times \{0\} \cup (-1, 1) \times \{1\}$i niech $p : X \longrightarrow \mathbb{R}$ będzie obcięciem projekcji $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ na pierwszą współrzędną. Wtedy p jest lokalnym homeomorfizmem, ale nie jest nakryciem, bowiem przekształcenie p ma niehomeomorficzne włókna, a przestrzeń $\mathbb{R}$ jest spójna.(Karol Janowicz)

4.2. Pokazać, że jeżeli nakrycie jest homotopijną równoważnością, to jest homeomorfizmem.

Odpowiedź: Niech $p : E \longrightarrow X$ będzie nakryciem będącym homotopijną równoważnością. Przypuśćmy, że p skleja pewne punkty, to znaczy $p(x) = p(y)$ dla $x, y \in E$. Wtedy $sp(x) = sp(y)$, gdzie $s : X \longrightarrow E$ jest homotopijną odwrotnością przekształcenia p. Wynika stąd, że x, y można połączyć drogą w E (przez homotopię między sp a id_E). Niech to będzie droga γ. Wówczas $p_\sharp(\gamma)$ jest pętlą w przestrzeni X, której podniesieniem zaczepionym w $x \in E$ jest oczywiście droga γ. Z jednoznaczności podniesienia i z faktu, że ($p_\sharp : \pi_1(E, x) \to \pi_1(X, p(x))$ jest izomorfizmem grup podstawowych (bo p jest homotopijną równoważnością) wynika, że γ jest pętlą, a więc $x = y$. Skoro p jest różnowartościowe, to to przekształcenie jest bijekcją; odwzorowanie odwrotne jest ciągłe z lokalnej trywialności.(Karol Janowicz)

Odpowiedź: Zauważmy, że nakrycie $p : E \to X$ jest lokalnym homeomorfizmem, więc wystarczy pokazać że to bijekcja, a właściwie przekształcenie różnowartościowe, bo wiemy że to surjekcja. Ustalmy $f : X \to E$ homotopjną odwrotność p. Z założeń istnieje $H : X \times I \to X$ taka że $H(,0) = pf$ oraz $H(,1) = id_X$. W ten sposób dostajemy przemienny kwadrat. Z własności podnoszenia homotopii istnieje $G : X \times I \to E$, zachowujące przemienność diagramu. W związku z tym $p(G(,1)) = id_X$ więc $G(,1)$ jest przekrojem. Jeśliby któreś włókno miało więcej niż jeden element, to wszystkie elementy tego włókna można by połączyć drogami (istnieje homotopia miedzy identycznością a $G(,1)p$) , ale obraz $G(,1)$ jest otwarto , więc włókna są maksymalnie jednopunktowe. (Piotr Oszer)

4.3. Pokazać, ze $p : S^1 \times S^1 \to S^1 \times S^1$ dane wzorem $p(z_1, z_2) = (z_1^3, z_2^2)$ jest nakryciem. Znaleźć jego krotność.

Odpowiedź: Odwzorowanie p jest nakryciem jako produkt dwu nakryć. Jest ono krotności 6, bowiem włókno nad każdym punktem $(w_1, w_2) \in S^1 \times S^2$ jest produktem włókien mocy odpowiednio 3 i 2.

4.4. Niech p_1, p_2 będą dwoma przekształceniami dla których zdefiniowane jest złożenie $p_3 = p_1 \circ p_2$. Czy jeśli p_1 i p_2 są nakryciami, to p_3 jest nakryciem?

Odpowiedź: Niech p_1 będzie produktowym nakryciem określonym na $S^1 \times \mathbb{N} \to S^1$. Określmy $p_2 : S^1 \times \mathbb{N} \to S^1 \times \mathbb{N}$, $p_2(x, n) = (x^n, n)$, jest to oczywiście nakrycie. Wybierając teraz punkt na okręgu i jego otoczenie, otoczenie to zawiera pewien łuk od długości większej niż $\frac{1}{n}$ dla pewnego n naturalnego, w związku z tym w przeciwobrazie znajdzie się cały okrąg (na poziomie n), co przeczy lokalnej trywialności. (Piotr Oszer)

4.5. Niech p_1, p_2 będą dwoma przekształceniami dla których zdefiniowane jest złożenie $p_3 = p_1 \circ p_2$. Czy jeśli p_2 i p_3 są nakryciami, to p_1 jest nakryciem?

Odpowiedź: Nakrycie jest pojęciem lokalnym, więc możemy bez straty ogólności założyć, że p_3 jest nakryciem produktowym $X \times F \to X$. Żeby mogło istnieć p_1, $p_2 : X \times F \to E$ może sklejać jedynie punkty w ramach włókien. W związku z tym (pamiętając, że p_2 jest nakryciem) E jest sumą rozłączną produktowych przestrzeni nakrywających dla łukowych spójnych składowych X i p_1 które jest wyznaczone jednoznacznie to rzutowanie na spójne składowe, jest to oczywiście nakrycie. (Piotr Oszer)

4.6. Czy nakrycia $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $p(z) = e^z$ oraz $q : \mathbb{R}^2 \to S^1 \times \mathbb{R}$, $q(x, y) = (e^{2\pi i x}, y)$ sa izomorficzne?

Odpowiedź: Tak, weźmy $\tilde{f}(a + bi) = (\frac{b}{2\pi}, exp(a))$, $f(z) = (z/|z|, |z|)$. Są to oczywiście homeomorfizmy oraz $q \circ f = \tilde{f} \circ p$, więc zadają izomorfizm nakryć. (Tomasz Kanas)