Spis treści

Rozdział 1

Teoria homotopii

1.1 Homotopia przekształceń i homotopijna równoważność przestrzeni

Zakładamy, że rozpatrywane przekształcenie przestrzeni topologicznych są ciągłe. Dla uproszczenia rozważań, będziemy również zakładać, że rozważane przestrzenie spełniają warunek Hausdorffa.

Rozważania poprzedniego rozdziału zakończyliśmy obserwacją, że homeomorfizm przestrzeni indukuje izomorfizm ich grup podstawowych. Można podać, znacznie słabszy niż istnienie homeomorfizmu, warunek wystarczający na to, by dwie przestrzenie miały izomorficzne grupy podstawowe. Warunek ten uściśli geometryczną intuicję, że przez "zgniatanie i rozciąganie" można zdeformować jedną przestrzeń do drugiej. Zacznijmy od przykładu:

Definicja. *Przekształcenia f, $g : X \to Y$ nazywają się* ***homotopijne*** *wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje przekształcenie $H : X \times I \to Y$, zwane homotopią miedzy f a g takie, że dla każdego $x \in X$, $H(x, 0) = f(x)$ oraz $H(x, 1) = g(x)$.*

Będziemy pisać $f \sim g$ wtedy i tylko wtedy gdy istnieje homotopia od przekształcenia f do przekształcenia g. Relacja $\sim$ w zbiorze przekształceń z przestrzeni X w przestrzeń Y jest relacją równoważności i jej klasy abstrakcji nazywać będziemy **klasami homotopii** i oznaczać symbolem $[X, Y]$. Klasę równoważności przekształcenia f będziemy nazywać jej klasą homotopii i oznaczać symbolem $[f]$. Geometryczna intuicja pojęcia homotopii jest taka, że jest ona deformacją w czasie t od przekształcenia f w momencie $t = 0$ do przekształcenia g w momencie $t = 1$. Następujące łatwe stwierdzenie pokazuje, że klasy homotopii można składać.

Stwierdzenie 1. *Jeżeli $f, g : X \to Y$ oraz $h, k : Y \to Z$ są takie, że $f \sim g$ i $h \sim k$, to $h \circ f \sim k \circ g$.*

W tym świecie, w którym przekształcenia zastępujemy ich klasami homotopii, izomorfizm będzie się nazywał homotopijną równoważnoscią i jest on zdefiniowany następująco:

Definicja. *Przekształcenie $f : X \to Y$ nazywa się* ***homotopijną równoważnością****, jeżeli istnieje przekształcenie $g : Y \to X$, nazywane homotopijną odwrotnością, takie że $g \circ f \sim id_X$ i $g \circ f \sim id_Y$.*

Definicja. *Przestrzenie X i Y są* ***homotopijnie równoważne****, co zapisujemy $X \approx Y$, jeżeli istnieje przekształcenie $f : X \to Y$, które jest homotopijną równoważnością. Przestrzeń homotopijnie równoważną z przestrzenią jednopunktową nazywamy przestrzenią* **ściągalną**.

Przykład 1. Każdy gwiaździsty podzbiór $X \subset \mathbb{R}^n$ jest ściągalny.

Relacja homotopijnej równoważności w klasie przestrzeni topologicznych jest relacją równoważności i jej klasy abstrakcji nazywamy **typami homotopijnymi**. Jeżeli mówimy, że przestrzeń X ma typ homotopijny okręgu S^1, to oznacza to po prostu, że przestrzeń X jest homotopijnie równoważna okręgowi. Każdy homeomorfizm jest homotopijna równoważnością, ale dwie przestrzenie homotopijnie równoważne nie muszą być bynajmniej homeomorficzne.

Przykład 2. Pokażemy, że włożenie $i : S^1 \hookrightarrow \mathbb{C}^*$ jest homotopijna równoważnością. Przekształcenie $r : \mathbb{C}^* \to S^1$ zadane wzorem $r(z) = \frac{z}{|z|}$ jest homotopijną odwrotnością. Oczywiście $r \circ i = id_{S^1}$, zaś $H : \mathbb{C}^* \times I \to \mathbb{C}^*$ zadane wzorem $H(z, s) = (1 - s)z + s\frac{z}{|z|}$ polegające na "zgniataniu" płaszczyzny bez punktu do okręgu jest homotopią $i \circ r \sim id_{C^*}$.

Zbadamy jakie operacje na przestrzeni topologicznej zachowują jej typ homotopii. Zauważmy następujące oczywiste własności homotopijnych równoważności:

Stwierdzenie 2. *Jeśli przekształcenia $f_i : X_i \to Y_i$, $i = 1, 2$ są homotopijnymi równoważnościami, to ich suma prosta $f_1 \coprod f_2 : X_1 \coprod X_2 \to Y_1 \coprod Y_2$ oraz produkt kartezjański $f_1 \times f_2 : X_1 \times X_2 \to Y_1 \times Y_2$ są także homotopijnymi równoważnościami.*

Z powyższego stwierdzenia wynika natychmiast, że produkt dowolnej liczby przestrzeni ściągalnych jest przestrzenią ściągalną, a suma rozłączna przestrzeni ściągalnych jest homotopijnie równoważna z przestrzenią dyskretną. Zauważmy też, że jeśli X_2 jest przestrzenią ściągalną, to rzutowanie $p_{X_1} : X_1 \times X_2 \to X_1$ jest homotopijną równoważnością.

1.1.1 Homotopia relatywna

Definicja. *Niech $A \subset X$ i niech $f, g : X \to Y$ będą takimi przekształceniami, że $\forall_{a \in A}\ f(a) = g(a)$. Przekształcenia f i g nazywają się **homotopijnymi względem** A jeśli istnieje homotopia $H : X \times I \to Y$, $H_{|X \times \{0\}} = f$, $H_{|X \times \{1\}} = g$ i taka, że $\forall_{a \in A,\, t \in I}\ H(a, t) = f(a) = g(a)$.*

Jeżeli przekształcenia f i g są homotopijne względem A, to oznaczamy to symbolem $f \sim g \operatorname{rel} A$. W zbiorze tych przekształceń z X w Y, które pokrywają się na zbiorze A, relacja homotopii względem A jest relacją równoważności.

1.2 Pary Borsuka

Wykazanie, że dwie przestrzenie X i Y są homotopijnie równoważne jest na ogół zadaniem niełatwym i często odbywa się etapami, to znaczy polega na skonstruowaniu ciągu przestrzeni i odwzorowań

$$X \xrightarrow{\approx} Z_1 \xleftarrow{\approx} Z_2 \xrightarrow{\approx} Z_3 \qquad \ldots Y\ ,$$

o których łatwo pokazać, że są homotopijnymi równoważnościami. Oczywistymi kandydatami na takie homotopijne równoważności są przekształcenia polegające na zgnieceniu do punktu pewnego ściągalnego podzbioru lub wklejeniu ściągalnego podzbioru. Rozważania tego rozdziału pozwolą między innymi na sformułowanie warunków wystarczających na to, by zgniecenie ściągalnego podzbioru lub wklejenie ściągalnego podzbioru nie zmieniało typu homotopii. Zaczniemy od przypomnienia pojęcia retrakcji.

Definicja. *Niech $A \subseteq X$ i niech $i_A : A \hookrightarrow X$ będzie włożeniem.*

*a) Przekształcenie $r : X \to A$ nazywa się **retrakcją**, jeżeli $r \circ i_A = id_A$.*

b) Retrakcja $r : X \to A$ nazywa się **retrakcją deformacyjną**, *jeżeli złożenie $i_A \circ r$ jest homotopijne z id_X. Podzbiór $A \subseteq X$ nazywa się* **retraktem deformacyjnym** *jeśli istnieje retrakcja deformacyjna $r : X \to A$.*

c) *Retrakcja $r : X \to A$ nazywa się* **silną retrakcją deformacyjną**, *jeżeli złożenie $i_A \circ r$ jest homotopijne z id_X względem A. Podzbiór $A \subseteq X$ nazywa się* **silnym retraktem deformacyjnym** *jeśli istnieje silna retrakcja deformacyjna $r : X \to A$.*

Stwierdzenie 3. *Jeżeli $A \subset X$ jest retraktem deformacyjnym, to włożenie $i_A : A \hookrightarrow X$ jest homotopijną równoważnością.*

Przykład 3. Podzbiór $i : S^1 \hookrightarrow \mathbb{C}^* \setminus \{0\}$ jest silnym retraktem deformacyjnym.

Stwierdzenie 4. *Jeśli $A \subset X$ jest silnym retraktem deformacyjnym, to dla dowolnego przekształcenia $f : A \to Y$ włożenie $Y \subset X \cup_f Y$ też jest silnym retraktem deformacyjnym.*

Dowód. Niech $r : X \to A$ będzie retrakcją, zaś $H : X \times I \to X$ będzie homotopią, o której mowa w definicji silnego retraktu deformacyjnego. Niech $\bar{r} : X \cup_f Y \to Y$ będzie zdefiniowane wzorem $\bar{r}([x]) = [r(x)]$ dla $x \in X$ i $\bar{r}([y]) = [y]$ dla $y \in Y$. Zdefiniujemy nową homotopię $\bar{H} : (X \cup_f Y) \times I \to X \cup_f Y$ wzorem : $\bar{H}(x,t) = H(x,t)$ dla $x \in X$ i $H(y,t) = y$ dla punktów $y \in Y$ i dowolnego $t \in I$. Łatwo sprawdzić, że $\bar{r}$ jest dobrze zdefiniowaną retrakcją zaś $\bar{H}$ dobrze zdefiniowaną homotopią, która ma własności wymienione w definicji silnego retraktu deformacyjnego. □

Przejdziemy teraz do badania typu homotopii ważnej konstrukcji tworzenia nowych przestrzeni, jaką jest przyklejanie przestrzeni wzdłuż podprzestrzeni . Nasuwa się pytanie czy typ homotopii przestrzeni $X \cup_f Y$, gdzie $f : A \to Y$, $A \subseteq X$ zależy od klasy homotopii przekształcenia f. Zauważmy, że rozważania te jako szczególny przypadek dotyczą pytania, kiedy zgniecenie podprzestrzeni do punktu lub wklejenie podzbioru nie zmienia typu homotopii.

Definicja. *Włożenie $A \subseteq X$ nazywa się* **parą Borsuka** *lub* **korozwłóknieniem** *jeżeli ma następującą własność przedłużania homotopii: dla dowolnej przestrzeni Y, dla dowolnego przekształcenia $f : X \to Y$ i dowolnej homotopii $H : A \times I \to Y$, dla której $H_{|A\times\{0\}} = f_{|A}$ istnieje taka homotopia $\tilde{H} : X \times I \to Y$, że $\tilde{H}_{|X\times\{0\}} = f$ i $\tilde{H}_{|A\times I} = H$.*

Innymi słowy istnieje przekształcenie $\tilde{H}$, dla którego poniższy diagram jest przemienny.

$$\begin{tikzcd}
 & A \times I \arrow[d, "H"] \arrow[dr] & \\
A \times \{0\} \arrow[ur] \arrow[dr, "j"'] & Y & X \times I \arrow[l, "\tilde{H}"] \\
 & X \times \{0\} \arrow[u, "f_0"] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Oczywiście jeżeli $f : X \to Y$ jest homeomorfizmem i $f(A) = B$, to jeśli $A \subset X$ jest parą Borsuka, to także $B \subset Y$ jest parą Borsuka.

Stwierdzenie 5. *Jeżeli para $A \subseteq X$ jest parą Borsuka, to podprzestrzeń $A \times I \cup X \times \{0\}$ jest retraktem $X \times I$.*

Dowód jest oczywisty - wystarczy wziąć $Y = A \times I \cup X \times \{0\}$.

Wniosek 1. *Jeżeli X jest przestrzenią Hausdorffa i $A \subseteq X$ jest parą Borsuka to $A \subseteq X$ jest podzbiorem domkniętym.*

Dowód. Jeżeli X jest przestrzenią Hausdorffa, to $X \times I$ też więc podzbiór $A \times I \cup X \times \{0\} \subset X \times I$ jako retrakt jest domknięty. Zatem $A \times \{1\} = A \times I \cup X \times \{0\} \cap X \times \{1\}$ jest domknięty. □

Ten wniosek jest jedna z przyczyn, dla której we wstępie **założyliśmy, że rozpatrywane przestrzenie spełniają warunek Hausdorffa.**

Stwierdzenie 6. *Jeżeli $A \subseteq X$ jest podzbiorem domkniętym i $A \times I \cup X \times \{0\}$ jest retraktem $X \times I$, to $A \subseteq X$ jest parą Borsuka.*

Dowód. Jeżeli $A \times I \cup X \times \{0\}$ jest retraktem $X \times I$, to każde przekształcenie ciągłe określone na $A \times I \cup X \times \{0\}$ przedłuża się do przekształcenia ciągłego określonego na $X \times I$. Jeżeli A jest domknięty, to przekształcenie przestrzeni $A \times I \cup X \times \{0\}$ zdefiniowane na $A \times I$ przez homotopię oraz przekształcenie określone na X (jak w definicji pary Borsuka), jest ciągłe. □

Przykład 4. Niech ∂I^n oznacza brzeg kostki $I^n \subset \mathbb{R}^n$. Włożenie $\partial I^n \subset I^n$ jest parą Borsuka. Podobnie jeśli zamiast całego brzegu rozpatrzymy sumę tylko niektórych jego ścian. Ogólniej, włożenie podwielościanu w wielościan jest parą Borsuka.

Stwierdzenie 7. *Jeżeli $A \subset X$ jest parą Borsuka i włożenie $i_A : A \hookrightarrow X$ jest homotopijną równoważnością, to podprzestrzeń A jest retraktem deformacyjnym przestrzeni X.*

Dowód. Niech $g : X \to A$ będzie homotopijną odwrotnością i niech $H : A \times I \to A$, będzie homotopia dla której $H_{|X\times\{0\}} = g \circ i_A$ i $H_{|X\times\{1\}} = id_A$. Niech $\tilde{H} : X \times I \to A$ będzie przedłużeniem. Wówczas $r = \tilde{H}_{|X\times\{1\}}$, $r \sim g$ jest szukana retrakcją deformacyjną.
W istocie można udowodnić, że A jest silnym retraktem deformacyjnym, ale ten dowód pominiemy. □

Przystąpimy do udowodnienia, że przy pewnych założeniach typ homotopijny przestrzeni powstającej przez przyklejenie zależy tylko od klasy homotopii przekształcenia doklejającego. Zaczniemy od przypadku zgniatania podzbioru do punktu. Wynika on wprawdzie z przypadku ogólnego, ale zamieszczamy jego dowód, gdyż jest prostszy i stanowi dobre wprowadzenie do dowodu następnego twierdzenia.

Stwierdzenie 8. *Jeśli $A \subseteq X$ jest parą Borsuka oraz przestrzeń A jest ściągalna, to projekcja $q_A : X \to X/A$ jest homotopijną równoważnością.*

Dowód. Trzeba skonstruować odwzorowanie homotopijnie odwrotne do q_A. Niech $H : A \times I \to A$ będzie homotopią miedzy identycznością a odwzorowaniem stałym w $a_0 \in A$. Ponieważ $A \subset X$ jest parą Borsuka, to istnieje rozszerzenie $\tilde{H} : X \times I \to X$, takie że $\tilde{H}(x, 0) = x$, $\quad \forall_{a\in A}\, \tilde{H}(a, 1) = a_0$, $\quad \forall_{a\in A}\forall_{t\in I}\, \tilde{H}(a, t) \in A$. Przekształcenie $\tilde{H}(-, 1) : X \to X$ definiuje homotopijną odwrotność $f : X/A \to X$ zadaną wzorem $f([x]) := \tilde{H}(x, 1)'$. Z definicji $\tilde{H}$ jest homotopią miedzy id_X a złożeniem $f \circ q_A$. Zauważmy, ze przekształcenie $\tilde{H} : X \times I \to X$ wyznacza przekształcenie ciągłe $\bar{H} : X/A \times I \to X/A$ dane wzorem $\bar{H}([x], t) = \tilde{H}(x, t)$, które jest homotopią między $id_{X/A}$ a złożeniem $q_A \circ f$. □

Stwierdzenie 9. *Jeżeli $A \subset X$ jest parą Borsuka, zaś $f : A \to Y$ jest dowolnym przekształceniem, to $Y \subset X \cup_f Y$ jest parą Borsuka.*

Dowód. Niech $r = (r_1, r_2) : X \times I \to A \times I \cup X \times \{0\}$ będzie retrakcją. Z założenia o domkniętości A wynika, że Y jest domkniętym podzbiorem $Y \subset X \cup_f Y$, więc przekształcenie $r' : (X \cup_f Y) \times I \to (Y \times I) \cup (X \cup_f Y) \times \{0\}$ zadane wzorem:

$$r'([x], t) = \begin{cases} ([r_1(x)], r_2(x)) & \text{dla } x \in X \\ ([y], t) & \text{dla } y \in Y \end{cases}$$

jest ciągłe i jest retrakcją. □

Definicja. **Stożkiem** *nad przestrzenią* A *nazywamy przestrzeń ilorazową* $A \times I / A \times \{1\}$. *Niech* $i : A \to CA$ *będzie włożeniem zadanym wzorem* $i(a) = [(a, 0)]$.

Przykład 5. Stożek nad sferą S^n jest homeomorficzny z dyskiem (kulą) D^{n+1}.

Stwierdzenie 10. *Stożek nad dowolną przestrzenią* A *jest ściągalny.*

Dowód. Homotopia $H : CA \times I \to CA$ miedzy id_{CA} a odwzorowaniem stałym jest dana wzorem $H([a, s], t) := [a, (1 - t)s + t]$. □

Ze stwierdzenia 9 wynika, że jeżeli $A \subseteq X$ jest parą Borsuka, to włożenie $CA \subseteq X \cup_i CA$ jest także parą Borsuka. Poniższy wniosek pokazuje, że (przy pewnych założeniach) zgniecenie podprzestrzeni do punktu można nie zmieniając typu homotopii zastąpić doklejeniem nad tą podprzestrzenią stożka.

Stwierdzenie 11. *Jeśli* $A \subset X$ *jest parą Borsuka, to istnieje homotopijna równoważność* $X \cup CA \to X/A$.

Dowód. Skoro $A \subset X$ jest parą Borsuka, to także $CA \subset X \cup CA$ jest parą Borsuka, a zatem rzutowanie $X \cup CA \to X \cup CA/CA$ jest homotopijną równoważnością. Włożenie $X \subset X \cup CA$ definiuje homeomorfizm $X/A = X \cup CA/CA$. □

Dowodzenie zależności typu homotopijnego przyklejenia jedynie od klasy homotopii odwzorowania przyklejającego rozpoczynamy od następującego lematu.

Lemat 1. *Jeżeli* $A \subseteq X$ *jest parą Borsuka, to* $X \times \{0\} \cup A \times I \subseteq X \times I$ *jest silnym retraktem deformacyjnym.*

Dowód. Niech $r : X \times I \to X \times \{0\} \cup A \times I$, $r(x, t) = (r_1(x, t), r_2(x, t))$ będzie retrakcją. Zdefiniujmy $G : X \times I \times I \to X \times I$ wzorem:

$$G((x, t), s) = (r_1(x, (1 - s)t), (1 - s)r_2(x, t) + ts).$$

Łatwo widać, że G jest homotopią pomiędzy id a retrakcją r i ponadto dla $x \in A$ i dowolnego $s \in I$, $G((x, t), s) = (x, (1 - s)t + ts) = (x, t)$. □

Mówimy, że $A \subset X$ jest zamkniętą parą Borsuka, jeżeli $A \subset X$ jest domknięty.

Twierdzenie 1. *Jeżeli* $A \subset X$ *jest zamkniętą parą Borsuka oraz przekształcenia* $f_0, f_1 : A \to Y$ *są homotopijne, to przestrzenie* $X \cup_{f_0} Y$ *oraz* $X \cup_{f_1} Y$, *są homotopijnie równoważne względem przestrzeni* Y.

Dowód. Niech $F : A \times I \to Y$ będzie homotopia między f_0 i f_1. Wykażemy, że oba włożenia $X \cup_{f_k} Y \subseteq (X \times I) \cup_F Y$ dla $k = 0, 1$ są retraktami deformacyjnymi. Ze względu na symetrię wystarczy ograniczyć się do $k = 0$. Zauważmy oczywisty homeomorfizm, wynikający z definicji doklejania:

$$X \cup_{f_0} Y = (X \times \{0\} \cup A \times I) \cup_F Y \subset (X \times I) \cup_F Y.$$

Niech $r : X \times I \to X \times \{0\} \cup A \times I$ będzie silną retrakcją deformacyjną zaś G homotopią definiującą silną deformację. Retrakcję r rozszerzamy do retrakcji $r_0 : (X \times I) \cup_F Y \to X \cup_{f_0} Y$ kładąc identyczność na przestrzeni Y. Ponieważ homotopia G jest stała na $X \times \{0\} \cup A \times I$, to rozszerza się w oczywisty sposób do homotopii $\bar{G}$ kładąc identyczność na przestrzeni Y. □

Wniosek 2. *Jeśli* $A \subseteq X$ *jest zamkniętą parą Borsuka, a odwzorowanie* $f : A \to Y$ *jest homotopijne ze stałym w punkt* y_0, *to przestrzeń* $X \cup_f Y$ *jest homotopijnie równoważna bukietowi* $(X/A) \vee Y$.

1.3 Zadania:

1.3.1. Niech $A \subseteq X$ będzie podzbiorem ściągalnym, oraz $a_0 \in A$. Czy włożenie $X \setminus A \to X \setminus \{a_0\}$ jest homotopijną równoważnością?

1.3.2. Wykazać, że przestrzenie otrzymane ze sfery S^2, torusa płaszczyzny rzutowej, butelki Kleina przez usunięcie $n > 0$ punktów są homotopijnie równoważne z bukietami okręgów (ilu?)

1.3.3. Udowodnić, że przestrzeń $X := \mathbb{R}^3 \setminus \{L_1 \cup \cdots \cup L_n\}$, gdzie L_i są prostymi parami nie przecinającymi się, jest homotopijnie równoważna z bukietem okręgów (ilu?). Uogólnić to zadanie na przestrzenie powstałe z przestrzeni kartezjańskich przez wyjęcie nie przecinających się podprzestrzeni liniowych.

1.3.4. Udowodnić, że dowolne dwa odwzorowanie $f, g : X \to U \subset \mathbb{R}^n$ o wartościach w otwartym podzbiorze $\mathbb{R}^n$, które są dostatecznie bliskie są homotopijne. Zauważyć, że otwarty podzbiór można zastąpić przez sferę lub ogólniej dowolny podzbiór $A \subset \mathbb{R}^n$, który jest retraktem pewnego swojego otoczenia.

1.3.5. Odwzorowanie $f : (S^1, 1) \to (X, x_0)$ jest homotopijne z przekształceniem stałym wtedy i tylko wtedy gdy rozszerza się na dysk $D^2 := \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$ tzn. istnieje $\bar{f} : D^2 \to X$ takie, ze $\bar{f}|S^1 = f$.

1.3.6. Niech $f : X \to S^n$ będą dowolnymi odwzorowaniami takimi, że dla każdego $x \in X$ zachodzi $f(x) \neq -g(x)$. Wykazać, że f i g są homotopijne. Wywnioskować, że każde przekształcenie $f \colon X \longrightarrow S^n$, które nie jest "na" jest homotopijne z przekształceniem stałym.

1.3.7. Podać przykład włożenia $A \hookrightarrow X$, które jest homotopijną równoważnością i takiego, że A nie jest retraktem deformacyjnym X.

1.3.8. Podać przykład retraktu, który nie jest retraktem deformacyjnym. Podać przykład retraktu deformacyjnego, który nie jest silnym retraktem deformacyjnym.

1.3.9. Udowodnić, że jeżeli $A \subseteq X$ jest parą Borsuka i włożenie $i : A \hookrightarrow X$ jest homotopijną równoważnością, to A jest retraktem deformacyjnym X.

Definicja. *Niech $f : X \to Y$. Cylindrem przekształcenia f nazywamy przestrzeń $Cyl(f) = (X \times I) \cup_f Y$, gdzie $X \times I \supset X \times \{0\} \to Y$.*

1.3.10. Pokazać, że $f : X \to Y$ jest homotopijną równoważnością wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją $h, g : Y \to X$ takie, że $fg \sim id_Y$ i $hf \sim id_X$.

Dowód. Dowodu wymaga tylko implikacja "$\Leftarrow$": Mamy $h \sim h(fg) = (hf)g \sim g$. Zatem $hf \sim gf \sim id_X$, co kończy dowód. □

1.3.11. Pokazać, że dla dowolnego przekształcenia $f : X \to Y$, włożenie $Y \hookrightarrow Cyl(f)$ jest homotopijną równoważnością.

1.3.12. Pokazać, że przekształcenie $f : X \to Y$ jest homotopijną równoważnością wtedy i tylko wtedy, gdy $X = X \times \{1\} \subset Cyl(f)$ jest retraktem deformacyjnym.

1.3.13. Niech X i Y będą przestrzeniami łukowo spójnymi. Niech $\{x_0\} \in X$ będzie punktem wyróżnionym takim, że $\{x_0\} \subset X$ jest parą Borsuka. Niech $\{y_0\} \in Y$ będzie punktem wyróżnionym. Pokazać, że dla każdego przekształcenia $f : X \to Y$ istnieje homotopijne z nim przekształcenie $g : X \to Y$, dla którego $g(x_0) = y_0$.

1.3.14. Pokazać, że: $S^1 \times S^1/S^1 \times \{s_0\} \approx S^2 \vee S^1$ oraz $S^1 \times D^2/S^1 \times S^1 \approx S^3 \vee S^2$

1.3.15. Wykazać, że $S^n/S^k \approx S^n \vee S^{k+1}$.

Rozdział 2

Algebra dróg w przestrzeni topologicznej

2.1 Grupoid podstawowy

Będziemy badać własności przestrzeni topologicznej poprzez analizę dróg w tej przestrzeni. Począwszy od tego miejsca jeżeli mówimy o przekształceniu przestrzeni topologicznych, to zakładamy, że przekształcenie to jest ciągłe.

Definicja. Drogą *ω w przestrzeni topologicznej X nazywamy przekształcenie $\omega : I \to X$, gdzie $I := [0,1]$ jest odcinkiem jednostkowym. Droga ω ma początek $o(\omega) := \omega(0)$ i koniec $e(\omega) := \omega(1)$. Dla drogi ω definiujemy drogę odwrotną ω^{-1}: $\omega^{-1}(t) := \omega(1-t)$. Zauważmy, że $o(\omega^{-1}) = e(\omega)$, $e(\omega^{-1}) = o(\omega)$ oraz $(\omega^{-1})^{-1} = \omega$. Drogą dla której $o(\omega) = e(\omega) = x$ nazywa się drogą zamkniętą lub* **pętlą** *zaczepioną w punkcie x. Pętlą stałą zaczepioną w punkcie x i oznaczaną ω_x nazywa się odwzorowanie stałe $\omega_x(t) = x$, dla każdego $t \in I$.*

Zbiór wszystkich dróg w X oznaczać będziemy symbolem $P(X)$. Podzbiór dróg o początku w punkcie $x \in X$ i końcu w punkcie $y \in X$ oznaczać będziemy symbolem $P(X; x, y)$. Mamy więc $P(X) = \bigcup_{(x,y)\in X\times X} P(X; x, y)$. W zbiorze $P(X)$ istnieje naturalne działanie - można złożyć dwie drogi, z których pierwsza kończy się w tym samym punkcie, w którym zaczyna druga.

Definicja. *Składaniem dróg nazywamy działanie:*

$$\star : P(X; x, y) \times P(X; y, z) \to P(X; x, z)$$

zdefiniowane dla dowolnych punktów $x, y, z \in X$ (niekoniecznie różnych)wzorem

$$(\omega \star \eta)(t) := \begin{cases} \omega(2t) & \textit{jeżeli } 0 \le t \le 1/2 \\ \eta(2t-1) & \textit{jeżeli } 1/2 \le t \le 1. \end{cases}$$

Przyporządkowanie przestrzeni topologicznej X zbioru dróg $P(X)$ wraz z działaniem składania można rozszerzyć na przekształcenia. Zauważmy, że dowolne przekształcenie $f : X \to Y$ definiuje odwzorowanie zbiorów $f_\sharp : P(X) \to P(Y)$ polegające na "przeciąganiu" dróg: $f_\sharp(\omega) := f \circ \omega$. Przeciąganie dróg przez przekształcenie zachowuje składanie — $f_\sharp(\omega \star \eta) = f_\sharp(\omega) \star f_\sharp(\eta)$. Ponadto przyporządkowanie przekształceniu przestrzeni topologicznych odwzorowania odpowiednich zbiorów dróg spełnia zależność: $(g \circ f)_\sharp = g_\sharp \circ f_\sharp$ oraz $id_\sharp = id$.
Działanie $\star$ na zbiorze $P(X)$, choć jest naturalne, niestety nie ma dobrych własności algebraicznych – nie jest łączne, pętle stałe nie są elementami neutralnymi a droga odwrotna nie jest odwrotnością. Sytuacja zmienia się drastycznie jeśli podzielimy zbiór $P(X)$ przez relację równoważności zwaną homotopią.

Definicja. **Homotopią** *między drogami* $\omega, \eta : I \to X$ *o tym samym początku* $o(\omega) = o(\eta) = x_0$ *i tym samym końcu* $e(\omega) = e(\eta) = x_1$ *nazywamy przekształcenie* $F : I \times I \to X$ *takie, że dla każdego* $t, s \in I$

$$\begin{aligned} F(t,0) &= \omega(t), & F(0,s) &= x_0, \\ F(t,1) &= \eta(t), & F(1,s) &= x_1. \end{aligned}$$

Mówimy, że drogi ω *i* η *są homotopijne, co oznaczamy* $\omega \sim \eta$, *jeżeli istnieje miedzy nimi homotopia.*

Definicja. *Przestrzeń topologiczna nazywa się* **jednospójna** *jeżeli jest łukowo spójna oraz dowolne drogi o tym samym początku i tym samym końcu są homotopijne.*

Przykład 6. a) Dowolne dwie drogi leżące w podzbiorze wypukłym w $\mathbb{R}^n$ są homotopijne, a więc taki zbiór jest jednospójny.

b) Jeżeli dwie drogi leżące w podzbiorze otwartym $\mathbb{R}^n$ są dostatecznie bliskie (w metryce sup), to są homotopijne.

c) Dowolna droga leżąca w podzbiorze otwartym $\mathbb{R}^n$ jest homotopijna z leżącą w tym podzbiorze drogą kawałkami liniowa oraz z drogą gładką.

Stwierdzenie 12. *Homotopia dróg jest relacją równoważności w zbiorze* $P(X)$.

Dowód. Pokażemy dla przykładu, że relacja homotopii dróg jest przechodnia. Jeżeli F jest homotopią między drogami ω i η, zaś H homotopią między drogami η i ζ. to łatwo sprawdzić, że przekształcenie $G : I \times I \to X$ zdefiniowane wzorem

$$G(t,s) = \begin{cases} F(t,2s), & \text{dla } s \leq \frac{1}{2} \\ H(t,2s-1), & \text{dla } s \geq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

jest homotopią między drogami ω i ζ. □

Zbiór klas równoważności tej relacji oznaczamy symbolem $\Pi(X)$, a klasę abstrakcji drogi ω symbolem $[\omega]$. Zauważmy, że dobrze zdefiniowany jest początek i koniec klasy homotopii dróg – $o([\omega]) = o(\omega)$ i $e([\omega]) = e(\omega)$. Podobnie jak poprzednio zbiór klas homotopii dróg o początku w punkcie $x \in X$ i końcu w punkcie $y \in X$ oznaczamy symbolem $\pi(X; x, y)$ i mamy $\Pi(X) = \bigcup_{(x,y) \in X \times X} \pi(X; x, y)$. Zauważmy, że relacja homotopii zachowuje składanie dróg:

Stwierdzenie 13. *Jeżeli* $\omega, \omega' \in P(X; x, y)$, $\eta, \eta' \in P(X; y, z)$ *oraz* $\omega \sim \omega'$ *i* $\eta \sim \eta'$, *to* $\omega \star \eta \sim \omega' \star \eta'$.

Dowód. Niech F będzie homotopią między ω a η, zaś H homotopią między ω' a η'. Wówczas szukana homotopia między odpowiednimi złożeniami jest dana wzorem $K(t,s) = (F(\cdot, s) \star H(\cdot, s))(t)$. □

Możemy zatem zdefiniować składanie klas homotopii dróg, które będziemy oznaczać tym samym symbolem $\star$ i ma ono następujące własności.

Stwierdzenie 14. *W zbiorze* $\Pi(X)$ *składanie klas homotopii dróg*

$$\star : \pi(X; x, y) \times \pi(X; y, z) \to \pi(X; x, z)$$

zdefiniowane dla dowolnych punktów $x, y, z \in X$ *ma następujące własności:*

a) Dla każdej klasy homotopii dróg $[\omega] \in \pi(X; x, y)$ *zachodzą równości:*

$$\begin{aligned} [\omega] \star [\omega_y] &= [\omega] & [\omega_x] \star [\omega] &= [\omega], \\ [\omega] \star [\omega^{-1}] &= [\omega_x] & [\omega^{-1}] \star [\omega] &= [\omega_y]. \end{aligned}$$

b) Dla dowolnych $[\omega] \in \pi(X; x, y)$, $[\eta] \in \pi(X; y, z)$, $[\zeta] \in \pi(X; z, u)$ zachodzi równość:

$$([\omega] \star [\eta]) \star [\zeta] \ = \ [\omega] \star ([\eta] \star [\zeta]).$$

Dowód. a) Udowodnijmy na przykład, że $[\omega]\star[\omega^{-1}] = [\omega_x]$. Zanim wypiszemy wzór na homotopię (a takich możliwych homotopii jest oczywiście bardzo wiele) wyobraźmy sobie jak ona wygląda. Dla $s = 0$ przebiegamy drogę ω tam i z powrotem, zaś dla $s = 1$ "stoimy w miejscu" - zatem jeżeli dla dowolnego s dojdziemy do punktu $\omega(1-s)$ i zawrócimy, to otrzymamy szukaną ciągłą rodzinę dróg, czyli homotopię. Zapiszemy to wzorem:

$$H(t,s) = \begin{cases} \omega(2(1-s)t) \text{ dla } t \leq \frac{1}{2} \\ \omega(2(s-1)t + 2(1-s)) \text{ dla } t \geq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

b) Żeby udowodnić łączność musimy po prostu zmienić "tempo" przebiegania całej drogi od x przez y do z. Szukany wzór jest następujący:

$$H(t,s) = \begin{cases} \omega((\frac{4}{s+1})t) \text{ dla } t \leq \frac{s+1}{4} \\ \eta(4t - (s+1)) \text{ dla } \frac{s+1}{4} \leq t \leq \frac{s+2}{4} \\ \zeta((\frac{4}{2-s})t + \frac{2+s}{4})) \text{ dla } \frac{s+2}{4} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

□

Definicja. *Zbiór $\Pi(X)$ z działaniem $\star$ składania klas homotopii dróg nazywamy* **grupoidem podstawowym** *przestrzeni X.*

Z poprzedniego stwierdzenia wynika, że dla każdego punktu $x \in X$, zbiór $\pi(X; x, x)$ z działaniem $\star$ jest grupą – jej elementem neutralnym jest $[\omega_x]$, zaś elementem $[\omega]^{-1}$ odwrotnym do elementu $[\omega]$ jest element $[\omega^{-1}]$.

2.2 Grupa podstawowa

Definicja. Grupą podstawową *przestrzeni X z wyróżnionym punktem $x \in X$ nazywamy zbiór $\pi(X; x, x)$ klas homotopii pętli zaczepionych w punkcie $x \in X$ z działaniem składania pętli. Grupę tę oznacza się symbolem $\pi_1(X, x)$ lub krócej $\pi(X, x)$*

Odpowiemy teraz na narzucające się pytanie o zależność grupy podstawowej od wyróżnionego punktu.

Definicja. *Niech dane będą dwie pary punktów $x, y \in X$ oraz $u, v \in X$ (niekoniecznie różnych) i wybierzmy elementy $[\eta] \in \pi(X; u, x)$ i $[\zeta] \in \pi(X; v, y)$ reprezentowane przez drogi η i ζ o początkach w punktach u i v i końcach w punktach x i y odpowiednio. Elementy te definiują przekształcenie :*

$$h_{[\eta],[\zeta]} : \pi(X; x, y) \to \pi(X; u, v)$$
$$h_{[\eta],[\zeta]}(\xi) := [\eta] \star [\xi] \star [\zeta^{-1}].$$

Własności przekształceń $h_{[\eta],[\zeta]}$ są podsumowane w następnym stwierdzeniu:

Stwierdzenie 15.

1. Dowolne przekształcenie $h_{[\eta],[\zeta]}$ jest bijekcja.

2. Przekształcenia wyznaczone przez drogi $[\eta]$, $[\zeta]$, $[\chi]$, $[\tau]$, dla których $e([\eta]) = o([\chi])$ i $e([\zeta]) = o([\tau])$ spełniają zależność:

$$h_{[\eta]\star[\chi],[\zeta]\star[\tau]} = h_{[\chi],[\tau]} \circ h_{[\eta],[\zeta]}$$

3. Niech $x, y, z \in X$ oraz $u, v, w \in X$ będą dwiema trójkami punktów (niekoniecznie różnych) i niech $[\eta] \in \pi(X; u, x)$, $[\zeta] \in \pi(X; v, y)$, $[\chi] \in \pi(X; w, z)$. Następujący diagram jest przemienny:

$$\begin{tikzcd}
\pi(X;x,y) \times \pi(X;y,z) \arrow[r, "\star"] \arrow[d, "h_{[\eta],[\zeta]} \times h_{[\zeta],[\chi]}"] & \pi(X;x,z) \arrow[d, "h_{[\eta],[\chi]}"] \\
\pi(X;u,v) \times \pi(X;v,w) \arrow[r, "\star"] & \pi(X;x,w)
\end{tikzcd}$$

Dowód. Dowód wynika bezpośrednio z definicji przekształcenia $h_{[\eta],[\zeta]}$. Na przykład łatwo się przekonać, że przekształcenie odwrotne do $h_{[\eta],[\zeta]}$ dane jest wzorem $h_{[\eta^{-1}],[\zeta^{-1}]}(\omega) = [\eta^{-1}] \star [\omega] \star [\zeta]$. □

Niech $x_0 \in X$ będzie ustalonym punktem. Z powyższych rozważań wynika, że dla przestrzeni łukowo spójnych grupa podstawowa $\pi_1(X, x_0)$ oraz punkty przestrzeni X wyznaczają już grupoid $\Pi(X)$. Mamy także następujący wniosek:

Wniosek 3. *Klasa homotopii dowolnej drogi $[\eta] \in \pi(X; x, y)$ definiuje izomorfizm grup*

$$h_{[\eta]} := h_{[\eta],[\eta]} : \pi_1(X, x) \xrightarrow{\simeq} \pi_1(X, y) \qquad h_{[\eta]}([\omega]) = [\eta] \star [\omega] \star [\eta^{-1}].$$

przy czym złożeniu dróg odpowiada złożenie tych izomorfizmów:

$$h_{[\eta]\star[\zeta]} = h_{[\zeta]} \circ h_{[\eta]}.$$

Przyporządkowanie przestrzeni grupoidu podstawowego możemy rozszerzyć na przekształcenia. Zauważmy, że jeżeli $f : X \to Y$ jest przekształceniem, to przeciągnięcie $f_\sharp : P(X) \to P(Y)$ zachowuje relację homotopii, a więc definiuje przekształcenie $f_\sharp : \Pi(X) \to \Pi(Y)$. Ponadto przekształcenie $f_\sharp$ zachowuje działania $f_\sharp([\omega] \star [\eta]) = f_\sharp([\omega]) \star f_\sharp([\eta])$ więc będziemy mówić, że przekształcenie $f_\sharp : \Pi(X) \to \Pi(Y)$ jest **homomorfizmem grupoidów podstawowych**. Homomorfizm indukowany przez identyczność na przestrzeni X jest identycznością na grupoidzie $\Pi(X)$. Dla przekształceń $f : X \to Y$ i $g : Y \to Z$ spełnione są zależności: $(g \circ f)_\sharp = g_\sharp \circ f_\sharp$ oraz $id_\sharp = id$

W szczególności wynika stąd, że przekształcenie $f : X \to Y$ indukuje homomorfizm grup podstawowych $f_\sharp : \pi_1(X, x) \to \pi_1(Y, f(x))$. Homomorfizm indukowany przez identyczność jest identycznością i dla przekształceń $f : X \to Y$ oraz $g : Y \to Z$, zachodzi równość $(g \circ f)_\sharp = g_\sharp \circ f_\sharp : \pi_1(X, x) \to \pi_1(Z, gf(x))$.

Wniosek 4. *Jeżeli $f : X \to Y$ jest homeomorfizmem, to dla dowolnego punktu $x \in X$, $f_\sharp : \pi_1(X, x) \to \pi_1(Y, f(x))$ jest izomorfizmem grup podstawowych.*

Reasumując, przestrzeni topologicznej i wyróżnionemu w niej punktowi przypisaliśmy grupę - grupę podstawową tej przestrzeni w wybranym punkcie przy czym

- dla przestrzeni łukowo spójnych klasa izomorfizmu grupy podstawowej nie zależy od wyboru punktu
- przekształcenia przestrzeni definiują homomorfizmy grup podstawowych.

W dalszej części wykładu badać będziemy ten algebraiczny niezmiennik przestrzeni topologicznych. Chcielibyśmy wiedzieć, jakie topologiczne własności przestrzeni on wyraża i jak go obliczyć dla konkretnych przestrzeni.

Lemat 2. *Jeżeli $f, g : X \to Y$ i niech $H : X \times I \to Y$ będzie homotopią $H_{|X\times\{0\}} = f$ i $H_{|X\times\{1\}} = g$. Niech $x, x' \in X$ będą dowolnymi punktami i rozpatrzmy drogi $\eta(s) = H(x, 1-s) \in \pi(Y; g(x), f(x))$ oraz $\chi(s) = H(x', 1-s) \in \pi(Y; g(x'), f(x'))$. Wówczas następujacy diagram jest przemienny:*

$$\begin{tikzcd}
\pi(X;x,x') \arrow[r, "f_\sharp"] \arrow[d, "g_\sharp"'] & \pi(Y;f(x),f(x')) \arrow[dl, "h_{[\eta],[\chi]}"] \\
\pi(Y;g(x),g(x')) &
\end{tikzcd} .$$

Dowód. Trzeba pokazać, że dla dowolnej drogi $\omega \in \pi(X; x, x')$ drogi $h_{[\eta],[\chi]}f_\sharp(\omega)$ i $g_\sharp(\omega)$ są homotopijne względem końców. Niech dla $t \in I$, $\eta_t(s) = H(x, 1 + (t-1)s)$, $\chi_t(s) = H(x', 1 + (1-t)s)$ zaś $\omega_t(s) = H(\omega(s), t)$. Łatwo sprawdzić, że $G : I \times I \to Y$ zadane wzorem $G(\cdot, t) = \eta_t \star \omega_t \star \chi_t^{-1}$ jest szukaną homotopią. $\square$

Wniosek 5. *Jeżeli $f, g : X \to Y$ są przekształceniami homotopijnymi, to dla każdego punktu $x \in X$ i pewnej drogi η (zależnej od x), następujący diagram jest przemienny:*

$$\begin{tikzcd}
\pi(X,x) \arrow[r, "f_\sharp"] \arrow[d, "g_\sharp"'] & \pi(Y,f(x)) \arrow[dl, "h_{[\eta],[\eta]}"] \\
\pi(Y,g(x)) &
\end{tikzcd} .$$

Stwierdzenie 16. *Jeżeli $f : X \to Y$ jest homotopijną równoważnością, to*

a) dla dowolnych $x, y \in X$, $f_\sharp : \pi(X; x, y) \to \pi(Y; f(x), f(y))$ jest bijekcją

b) dla dowolnego punktu $x \in X$, $f_\sharp : \pi_1(X; x) \to \pi_1(Y; f(x))$ jest izomorfizmem grup podstawowych.

Dowód. Niech $H : X \times I \to X$ będzie homotopią od $g \circ f$ do id_X. Niech $x, y \in X$, zaś $\eta(s) = H(x, 1-s)$ i $\zeta(s) = H(y, 1-s)$. Wówczas następujący diagram homomorfizmów jest przemienny:

$$\begin{tikzcd}
\pi(X;x,y) \arrow[r, "(g\circ f)_\sharp"] \arrow[dr, "id"'] & \pi(X;gf(x),gf(y)) \arrow[d, "h_{[\eta],[\zeta]}"] \\
& \pi(X;x,y)
\end{tikzcd} .$$

Wynika stąd, że złożenie $(g \circ f)_\sharp = g_\sharp \circ f_\sharp$ jest bijekcją, a więc $f_\sharp$ jest różnowartościowe, zaś $g_\sharp$ jest "na". Analogicznie pokazujemy, że $(f \circ g)_\sharp$ jest bijekcją a zatem $g_\sharp$ jest różnowartościowe, zaś $f_\sharp$ jest "na", co kończy dowód. $\square$

Wniosek 6. *Grupa podstawowa przestrzeni ściągalnej jest trywialna, czyli innymi słowy przestrzeń ściągalna jest jednospójna.*

Stwierdzenia, że przestrzenie homotopijnie równoważne mają izomorficzne grupy podstawowe nie można odwrócić. Na marginesie powiedzmy, że znalezienie takich niezmienników algebraicznych, które rozstrzygałyby, czy przestrzenie są homotopijnie równoważne jest niespełnionym marzeniem topologów algebraicznych.

2.2.1 Pętle jako odwzorowania zdefiniowane na okręgu

Ważny przypadek, w którym rozpatruje się homotopie względem podzbioru, to homotopie przekształceń zachowujące wyróżniony punkt. Dla dwóch przestrzeni z wyróżnionymi punktami (X, x_0) i (Y, y_0) będziemy oznaczać symbolem $[(X, x_0), (Y, y_0)]_*$ zbiór klas homotopii rel$\{x_0\}$ przekształceń $f : X \to Y$ takich, że $f(x_0) = y_0$. Niekiedy, gdy wiadomo jakie punkty są wyróżnione, będziemy pisać krócej $[X, Y]_*$.
Czasem bywa wygodniejsze interpretowanie pętli $\omega : I \to X$ zaczepionych w punkcie x_0 jako odwzorowań zdefiniowanych na okręgu S^1. Przez S^1 będziemy zawsze oznaczać podprzestrzeń płaszczyzny zespolonej $\mathbb{C}$ składającą się z liczb o module 1. Istnieje bardzo ważne odwzorowanie $exp : \mathbb{R} \to S^1$ dane wzorem $exp(t) := e^{2\pi i t}$. Jego obcięcie do odcinka I zadaje homeomorfizm $I/\{0, 1\} \xrightarrow{\cong} S^1$.

Stwierdzenie 17. *Odwzorowanie $exp : I \to S^1$ zadaje bijekcję*

$$e : P(X, x_0, x_0) \backsimeq \{f : S^1 \to X : f(1) = x_0\},$$

zachowującą relację homotopii, a więc zadaje także bijekcję $\bar{e} : \pi_1(X, x_0) \simeq [S^1, X]_*$.

Opiszemy bezpośrednio działanie grupowe w zbiorze $[S^1, X]_*$. W tym celu przypomnijmy (zad.1.6), że bukiet $S^1 \vee S^1 = \{(z_1, z_2) \in S^1 \times S^1 : z_1 = 1 \; lub \; z_2 = 1\}$. Zdefiniujemy *komnożenie* $\nu : S^1 \to S^1 \vee S^1$ wzorem

$$\nu(z) := \begin{cases} (z^2, 1) & \text{jeżeli } \mathrm{Im}(z) \geq 0; \\ (1, z^2) & \text{jeżeli } \mathrm{Im}(z) \leq 0. \end{cases}$$

Dla dwóch przekształceń $f, g : (S^1, 1) \to (X, x_0)$ definiujemy $f \star g := (f \vee g) \circ \nu$. Oczywiście $(f \star g) \circ exp = (f \circ exp) \star (g \circ exp)$, gdzie gwiazdka po prawej stronie oznacza złożenie dróg, a więc opisane "mnożenie" przekształceń określonych na S^1 odpowiada wcześniej opisanemu składaniu pętli.

2.2.2 Grupoid podstawowy w języku teorii kategorii

Definicja. *Kategoria nazywa się **mała**, jeżeli klasa jej obiektów jest zbiorem. Mała kategoria nazywa się **grupoidem** wtedy i tylko wtedy, gdy każdy morfizm jest izomorfizmem. **Grupoid** $\mathcal{G}$ nazywa się spójny, jeżeli dla dowolnych dwóch obiektów x i y zbiór morfizmów $Mor_{\mathcal{G}}(x, y) \neq \emptyset$ między nimi jest niepusty.*

Stwierdzenie 18. *Niech kategoria $\mathcal{G}$ będzie grupoidem. Wówczas*

a) dla dowolnego obiektu x zbiór $Mor_{\mathcal{G}}(x, x)$ ze składaniem morfizmów jest grupą.

b) dla dowolnych obiektów x, y, u, v, morfizmy $\eta \in Mor_{\mathcal{G}}(u, x)$, $\zeta \in Mor_{\mathcal{G}}(v, y)$ definiują bijekcję

$$h_{\eta,\zeta} : Mor_{\mathcal{G}}(x, y) \to Mor_{\mathcal{G}}(u, v)$$
$$h_{\eta,\zeta}(\xi) := \zeta^{-1} \circ \xi \circ \eta.$$

Dowód. Punkt a) jest oczywisty.
b) Dowód łatwo widać, gdy spojrzy się na diagram:

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, "\xi"] \arrow[d, shift left, "\eta^{-1}"] & y \arrow[d, shift left, "\zeta^{-1}"] \\ u \arrow[u, shift left, "\eta"] & v \arrow[u, shift left, "\zeta"] \end{tikzcd}$$

Przekształcenie $h_{\eta,\zeta}^{-1} = h_{\eta^{-1},\zeta^{-1}}$, więc jest to bijekcja.

□

Wniosek 7. *Jeżeli grupoid jest spójny, to dla dowolnych dwóch obiektów x, y, morfizm $\eta \in Mor_{\mathcal{G}}(x,y)$ definiuje izomorfizm grup*

$$h_{\eta,\eta} : Mor_{\mathcal{G}}(y,y) \to Mor_{\mathcal{G}}(x,x)$$

.

Wniosek 8. *Grupoid spójny $\mathcal{G}$ jest równoważny kategorii z jednym obiektem x i morfizmami $Mor_{\mathcal{G}}(x,x)$.*

Stwierdzenie 14 mówi, że dla ustalonej przestrzeni X , $\Pi(X)$ jest grupoidem. Rozważania poprzedzające Wniosek 4 pokazują, że przyporządkowanie przestrzeni jej grupoidu podstawowego jest funktorem z kategorii przestrzeni topologicznych i funkcji ciągłych do kategorii małych kategorii. Wartości tego funktora leżą w podkategorii złożonej z grupoidów. Lemat 2 w języku kategoryjnym oznacza, że homotopia między przekształceniami $f, g : X \to Y$ definiuje transformację funktora $f_\sharp : \Pi(X) \to \Pi(Y)$ w funktor $g_\sharp : \Pi(X) \to \Pi(Y)$, która jest naturalnym izomorfizmem. Wynika już z tego, że homotopijna równoważność jest równoważnością kategorii (Stwierdzenie 16), a to oznacza, że w szczególności grupy podstawowe są izomorficzne.

Z definicji grupy podstawowej jasno wynika, że jest ona funktorem z kategorii $\mathcal{T}op_{*,h}$ przestrzeni punktowanych i klas homotopii przekształceń modulo punkt wyrożniony, w kategorię grup.

2.3 Appendix - elementy teorii kategorii

Teorię kategorii zapoczątkował artykuł: Samuel Eilenberg, Saunders Mac Lane *General Theory of Mathematical Equivalences*, Trans. of Mathematics 1945

Definicja. *Kategoria $\mathcal{C}$ to:*

- *klasa obiektów* ob $\mathcal{C}$
- *dla każdych dwóch obiektów $X, Y \in$* ob $\mathcal{C}$ *dany jest* **zbiór** *morfizmów $Mor_{\mathcal{C}}(X,Y)$*
- *dla każdego obiektu $X \in$* ob $\mathcal{C}$ *wyróżniony jest morfizm $id_X \in Mor_{\mathcal{C}}(X,Y)$*
- *dla każdych trzech obiektów $X, Y, Z \in$* ob $\mathcal{C}$ *dana jest funkcja (składanie morfizmów)*

$$\begin{array}{rcl} \circ\colon Mor_{\mathcal{C}}(Y,Z) \times Mor_{\mathcal{C}}(X,Y) & \longrightarrow & Mor_{\mathcal{C}}(X,Z) \\ (g,f) & \longrightarrow & g \circ f \end{array}$$

  taka, że

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$$

$$id_Y \circ f = f \circ id_X = f$$

Kategorie oznaczamy na ogół literami $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ a zbiory morfizmów między obiektami $X, Y \in \mathrm{ob}\,(\mathcal{C})$ oznaczamy $\mathcal{C}(X,Y)$ lub $Mor_{\mathcal{C}}(X,Y)$.

Dla każdej kategorii $\mathcal{C}$ możemy skonstruować kategorię przeciwną "odwracając" strzałki.

Definicja. *Dla kategorii $\mathcal{C}$ przez $\mathcal{C}^{op}$ oznaczamy kategorię przeciwną do kategorii $\mathcal{C}$, czyli taką, że* $\mathrm{ob}\,\mathcal{C}^{op} = \mathrm{ob}\,(\mathcal{C})$ *a dla dowolnych $A, B \in \mathrm{ob}\,\mathcal{C}^{op}$ definiujemy $\mathcal{C}^{op}(A,B) := \mathcal{C}(B,A)$ z oczywistą operacją składania.*

Definicja. *Morfizm $f \in Mor_{\mathcal{C}}(X,Y)$ nazywamy izomorfizmem jeżeli istnieje morfizm $g \in Mor_{\mathcal{C}}(Y,X)$, dla którego $g \circ f = id_X$ i $f \circ g = id_Y$.*

Definicja. *Kategoria $\mathcal{C}'$ jest podkategorią kategorii $\mathcal{C}$, jeżeli* $\mathrm{ob}\,\mathcal{C}' \subset \mathrm{ob}\,\mathcal{C}$ *i* $Mor_{\mathcal{C}'}(X,Y) \subset Mor_{\mathcal{C}}(X,Y)$ *z tą samą co w $\mathcal{C}$ operacją składania i tymi samymi wyróżninymi morfizmami identycznociowymi. Podkategoria $\mathcal{C}' \subset \mathcal{C}$ nazywa się pełna, jeżeli dla każdych $X, Y \in \mathcal{C}'$,* $Mor_{\mathcal{C}'}(X,Y) = Mor_{\mathcal{C}}(X,Y)$ *.*

Definicja. *Kategorię $\mathcal{C}$ nazywamy* małą *jeśli klasa obiektów* $\mathrm{ob}\,(\mathcal{C})$ *jest zbiorem.*

Przykłady:

$\mathcal{S}et$ – kategoria zbiorów i ich dowolnych przekształceń,

$\mathcal{S}et_*$ – kategoria zbiorów z wyróżnionym punktem i przekształceń zachowujących te punkty,

$\mathcal{G}r$ – kategoria grup i homomorfizmów; $\mathcal{A}b \subset \mathcal{G}r$ pełna podkategoria grup abelowych,

$\mathcal{T}op$ – kategoria przestrzeni topologicznych i przekształceń ciągłych,

$\mathcal{T}op_*$ – kategoria przestrzeni topologicznych z wyróżnionym punktem i przekształceń ciągłych zachowujących te punkty,

$\mathcal{T}op_h$ – kategoria przestrzeni topologicznych i klas homotopii przekształceń ciągłych,

$\mathcal{T}op_{h*}$ – kategoria przestrzeni topologicznych z wyróżnionym punktem i klas homotopii przekształceń ciągłych relatywnie wyróżnione punkty,

$\mathcal{B}G$ – jeżeli G jest grupą, to przez $\mathcal{B}G$ oznaczać będziemy kategorię o jednym obiekcie, w której morfizmy odpowiadają elementom grupy a ich składanie jest wyznaczone przez działanie grupowe.

$\mathcal{E}G$ – jeżeli G jest grupą, to przez $\mathcal{E}G$ oznaczać będziemy kategorię, w której obiekty odpowiadają elementom grupy G, i w której jest dokładnie jeden $g_1 \to g_2$ wyznaczny przez element $g_2 g_1^{-1}$. Mamy oczywisty funktor $\mathcal{E}G \to \mathcal{B}G$.

$\mathcal{C}(X)$ – Jeżeli X jest zbiorem częściowo uporządkowanym, to możemy traktować go jako kategorię, której obiektami są elementy tego zbioru, zaś między obiektami x i y istnieje morfizm $x \to y$ jeżeli $x \leq y$. Funktory między takimi kategoriami, to funkcje zachowujące porządek. Kategorią taką oznaczamy symbolem $\mathcal{C}(X)$.

Definicja. *Funktor (kowariantny) $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ między kategoriami $\mathcal{C}$ i $\mathcal{D}$ jest zadany przez przyporządkowanie obiektom kategorii $\mathcal{C}$ obiektów kategorii $\mathcal{D}$:*

$$F\colon\ \mathrm{ob}\,(\mathcal{C}) \to \mathrm{ob}\,(\mathcal{D})$$

oraz odwzorowania

$$F_{X,Y}\colon Mor_{\mathcal{C}}(X,Y) \to Mor_{\mathcal{D}}(F(X), F(Y)),$$

określone dla dowolnych obiektów $X, Y \in \mathrm{ob}\,(\mathcal{C})$ i takie, że

$$F_{X,X}(\iota_X) = \iota_{F(X)} \qquad F_{X,Z}(gh) = F_{Y,Z}(g) F_{X,Y}(h).$$

Funktor kowariantny $F\colon \mathcal{C}^{op} \to \mathcal{D}$ nazywa się funktorem kontrawariantnym na $\mathcal{C}$.

Definicja. *Jeśli dane są dwa funktory $F_i\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, $i = 1,2$ to ich* transformacją naturalną *nazywamy przyporządkowanie każdemu obiektowi $X \in \mathrm{ob}\,(\mathcal{C})$ morfizmu (w $\mathcal{D}$) $\Phi_X\colon F_1(X) \to F_2(X)$ tak, że dla dowolnego morfizmu $f\colon X \to Y$ w $\mathcal{C}$ następujący diagram w kategorii $\mathcal{D}$ jest przemienny:*

$$\begin{tikzcd}
F_1(X) \arrow[r, "\Phi_X"] \arrow[d, "F_1(f)"'] & F_2(X) \arrow[d, "F_2(f)"] \\
F_1(Y) \arrow[r, "\Phi_Y"] & F_2(Y)
\end{tikzcd}$$

Transformacja naturalna Φ nazywa się naturalną równoważnością funktorów *jeśli dla każdego obiektu $X \in \mathrm{ob}\,(\mathcal{C})$, morfizm Φ_X jest izomorfizmem.*

Definicja. *Funktor $F\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ jest równoważnością kategorii wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje funktor $G : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{C}$ oraz naturalne równoważności funktorów $F \circ G \simeq id_{\mathcal{D}}$ i $G \circ F \simeq id_{\mathcal{C}}$.*

Podamy znacznie wygodniejszy warunek na to, by funktor był równoważnościa kategorii - nie wymagający konstruowania funktora odwrotnego.

Twierdzenie 2. *Funktor $F\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ jest równoważnością kategorii wtedy i tylko wtedy, gdy*

1. *$F\colon Mor_{\mathcal{C}}(A, B) \longrightarrow Mor_{\mathcal{D}}(F(A), F(B))$ jest bijekcją dla dowolnych $A, B \in \mathrm{ob}\,(\mathcal{C})$;*
2. *każdy obiekt $Y \in \mathrm{ob}\,(\mathcal{D})$ jest izomorficzny z obiektem $F(A)$ dla pewnego $A \in \mathrm{ob}\,(\mathcal{C})$.*

Doskonałe wyjaśnienie motywacji tych definicji, a w szczególności transformacji naturalnej znajduje się we wstępie do oryginalnego artykułu Eilenberga-MacLane'a, w którym zostały wprowadzone do matematyki pojęcia teorii kategorii. Przytoczymy omawiany tam przykład:

Przykład 7. Zdefiniujemy kategorię skończenie wymiarowych, rzeczywistych przestrzeni wektorowych $\mathcal{V}ect_{\mathbb{R}}^{fin}$. Jej obiektami są skończenie wymiarowe rzeczywiste przestrzenie wektorowe. Dla dowolnych dwóch przestrzeni $V, W \in \mathrm{ob}\,(\mathcal{V}ect_{\mathbb{R}}^{fin})$, morfizmy to odwzorowania liniowe, czyli $Mor(V, W) := \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V, W)$. Złożenie morfizmów to złożenie przekształceń liniowych a element neutralny to przekształcenie identycznościowe. Tak zdefiniowana $\mathcal{V}ect_{\mathbb{R}}^{fin}$ spełnia oczywiście aksjomaty kategorii Def. 2.3. Zauważmy przy okazji, że kategoria $\mathcal{V}ect_{\mathbb{R}}^{fin}$ jest równoważna swojej podkategorii, której obiektami są przestrzenie wektorowe $\mathcal{N} := \{\mathbb{R}^n \,|\, n = 0, 1, 2, \dots\}$ a morfizmami wszystkie odworowania liniowe. Istotnie, włożenie $\mathcal{N} \to \mathcal{C}$ jest równoważnością kategorii, bo każda przestrzeń skończenie wymiarowa jest izomorficzna z pewną przestrzenią $\mathbb{R}^n$.

Na kategorii $\mathcal{V}ect_{\mathbb{R}}^{fin}$ rozpatrzymy dwa funktory, znane dobrze z Algebry Liniowej:

- Funktor kontrawariantny przestrzeni sprzężonej $^*\colon (\mathcal{V}ect_{\mathbb{R}}^{fin})^{op} \to \mathcal{V}ect_{\mathbb{R}}^{fin}$ przypisujący przestrzeni V przestrzeń sprzężoną V^* oraz odwzorowaniu liniowemu $f\colon V \to W$ przekształcenie liniowe $f^*\colon W^* \to V^*$.
- Funktor drugiej przestrzeni sprzężonej, czyli złożenie funktora * ze sobą. Jest to funktor kowariantny $^{**}\colon \mathcal{V}ect_{\mathbb{R}}^{fin} \to \mathcal{V}ect_{\mathbb{R}}^{fin}$, który przypisuje przestrzeni wektorowej V przestrzeń $V^{**} := (V^*)^*$ a homorfizmowi $f\colon V \to W$ przekształcenie liniowe $f^{**}\colon V^{**} \to W^{**}$.

Dla każdej przestrzeni liniowej V istnieje izomorfizm $V \simeq V^*$, ale do zdefiniowania go konieczny jest pewien wybór np. bazy w V lub iloczynu skalarnego w V.

Izomorfizm $V \simeq V^{**}$, może być zdefiniowany kanonicznie tzn. wyłącznie w terminach przestrzeni V, bez odwoływania się do dodatkowych struktur, jak w poprzednim przypadku. Dla dowolnej przestrzeni V zdefiniujmy przekształcenie liniowe $\Phi_V\colon V \to V^{**}$ wzorem $\Phi_V(v)(\varphi) := \varphi(v)$. przekształcenie Φ_V jest różnowartościowe, a więc dla skończenie wymiarowych przestrzeni wektorowych jest izomorfizmem, bowiem $\dim(V) = \dim(V^{**})$. Znane z Algebry Liniowej określenie Φ_V jako *kanonicznego izomorfizmu* znajduje ścisłe sformułowanie w postaci stwierdzenia, że Φ_V jest transformacją naturalną (równoważnością) funktora identycznościowego do funktora drugiej przestrzeni sprzężonej. Istotnie, dla dowolnego odwzorowania liniowego $f\colon V \to W$ diagram przekształceń liniowych:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\Phi_V"] \arrow[d, "f"'] & V^{**} \arrow[d, "f^{**}"] \\ W \arrow[r, "\Phi_W"'] & W^{**} \end{tikzcd}$$

jest przemienny.

Zauważmy, że dla każdej z kategorii 1.–9. istnieje *funktor zapominania* $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{S}et$ prowadzący do kategorii zbiorów, polegający na przyporządkowaniu zbiorowi ze strukturą samego zbioru, a morfizmom odpowiednich przekształceń zbiorów. Funktor zapominania jest oczywiście różnowartościowy na zbiorach morfizmów, ale na ogół skleja klasy izomorfizmu obiektów np. $F\colon \mathcal{G}r \to \mathcal{S}et$ przeprowadza nieizomorficzne grupy $\mathbb{Z}_4$ i $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ na izomorficzne zbiory czteroelementowe. Kategorie wyposażone w funktor zapominania do kategorii zbiorów (który można opisać aksjomatycznie) nazywają się *kategoriami konkretnymi.* Mówiąc nieformalnie, są to kategorie których obiektami są zbiory z wyróżnioną strukturą (np. porządkiem, działaniem lub topologią) a morfizmami przekształcenia zbiorów zachowujące tę strukturę.

Definicja. *Kategorię $\mathcal{C}$ nazywamy* małą *jeśli klasa obiektów* $\mathrm{ob}\,(\mathcal{C})$ *jest zbiorem.*

Obiekty w małych kategoriach często oznaczamy małymi literami, a więc $c \in \mathrm{ob}\,(\mathcal{C})$. Kategorie BG i EG są przykładami małych kategorii, kategoria

Przykład 8. Niech $(S, \leq)$ będzie zbiorem częściowo uporządkowanym (*poset*). Zdefiniujemy kategorię $\mathcal{C}_S$, w której $\mathrm{ob}\,(\mathcal{C}_S) := S$ oraz

$$Mor(s_1, s_2) = \begin{cases} (s_2, s_1) & \text{jeśli} \quad s_1 \leq s_2 \\ \emptyset & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases} .$$

Złożenie zdefiniowane jest w oczywisty sposób: $(s_3, s_2)(s_2, s_1) := (s_3, s_1)$.

Małe kategorie i funktory między nimi tworzą kategorię (bo funktory między małymi kategoriami tworzą zbiór!) oznaczaną $\mathcal{C}\dashv\sqcup$. Ostatnie przykłady oznaczają, że kategoria grup i kategoria zbiorów częściowo uporządkowanych są równoważne pewnym podkategoriom w $\mathcal{C}\dashv\sqcup$. Jedynym wspólnym obiektem obu odpowiednich podkategorii jest zbiór jednopunktowy.

2.4 Zadania

Uwaga: homotopie dróg oznaczają homotopie modulo końce.

2.4.1. Dowolna droga leżąca w $\mathbb{R}^n \setminus 0$ o końcach leżących na sferze $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n \setminus 0$ jest homotopijna z drogą leżącą na sferze.

2.4.2. Pokazać, że dla $n > 1$ sfera S^n jest jednospójna.

2.4.3. Pokazać, że sfera S^∞ jest ściągalna.

2.4.4. Niech drogi ω , ω' łączą punkty x_0 i x_1. Udowodnić, że następujące warunki są równoważne:

1) $\omega \sim \omega'$;

2) $\omega^{-1} \star \omega' \sim \omega_{x_1}$;

3) $\omega \star (\omega')^{-1} \sim \omega_{x_0}$.

2.4.5. Pokazać, że przyporządkowanie $([\alpha], [\beta]) \to ([\alpha \times \beta])$ definiuje naturalny homorfizm grup: $\pi_1(X, x) \times \pi_1(Y, y) \to \pi_1(X \times Y, (x, y))$. Pokazać, że jest on izomorfizmem wskazując homomorfizm odwrotny.

2.4.6. Jeżeli dla pewnych dwóch punktów $x, y \in X$ łukowo spójnej przestrzeni X, każde dwie drogi o początku w punkcie x i końcu w punkcie y są homotopijne, to dla każdego $z \in X$, grupa $\pi_1(X, z)$ jest trywialna.

2.4.7. Niech $F : I \times I \to X$ będzie odwzorowaniem. Zdefiniujmy cztery drogi będące obcięciami F do boków kwadratu: $\omega_i(t) := F(i, t)$ oraz $\eta_i := F(t, i)$ dla $i = 0, 1$. Wykazać, że $\omega_0 \star \eta_1 \sim \eta_0 \star \omega_1$. Korzystając z tego zadania podać inny dowód lematu o tym, jak wyglądają przekształcenia indukowane przez przekształcenia homotopijne.

2.4.8. Jeżeli G jest grupą topologiczną, to mnożenie w grupie G zadaje działanie grupowe w zbiorze $\pi_1(G, e)$. Udowodnić, że jest ono identyczne z działaniem zadanym przez składanie dróg i wykazać, że grupa $\pi_1(G, e)$ jest abelowa.

2.4.9. Udowodnić, że w poprzednim zadaniu wystarczy założyć, że istnieje $\mu \colon G \times G \longrightarrow G$, które jest homotopijnie łączne i e jest homotopijnym (obustronnym) elementem neutralnym. (przestrzeń taka nazywa się H-przestrzenią.)

2.4.10. Niech X będzie przestrzenią łukowo spójną. Pokazać, że grupa podstawowa $\pi_1(X, x)$ działa na zbiorze $\pi(X; x, y)$ z lewej strony a grupa $\pi_1(X, y)$ z prawej strony. Pokazać, że oba działania są wolne i tranzytywne oraz wzajemnie przemienne.

2.4.11. Udowodnić, że jeżeli na zbiorze S działa z lewej strony grupa G a z prawej grupa H oraz działania te są wolne, tranzytywne i wzajemnie przemienne, to dowolny element $s \in S$ definiuje izomorfizm grup $\phi_s : G \to H$. Zastosować tezę tego zadania do przykładu z poprzedniego zadania.

2.4.12. Niech X będzie przestrzenią łukowo spójną. Rozważmy naturalne przekształcenie $\Phi : \pi_1(X, x_0) \to [S^1, X]$. Pokazać, że przekształcenie to jest "na" i że $\Phi([f]) = \Phi([g])$ wtedy i tylko wtedy, gdy $[f]$ i $[g]$ są sprzężone w grupie $\pi_1(X, x_0)$.

Rozdział 3

Przekształcenia nakrywające

3.1 Definicja i podstawowe własności

Przekształcenia nakrywające (zwane też nakryciami) to przekształcenia ciągłe o szczególnie prostej strukturze lokalnej. Okazuje się, że istnieje bliski związek miedzy nakryciami danej przestrzeni a jej własnościami homotopijnymi, w szczególności algebrą dróg opisaną w poprzednich rozdziałach.

Definicja. *Niech F będzie niepustą przestrzenią dyskretną, a X dowolną przestrzenią topologiczną.*

a) Rzutowanie $p_1 : X \times F \to X$. nazywamy ***nakryciem produktowym*** *nad X z włóknem F.*

b) Przekształcenie $p : \tilde{X} \to X$ nazywa się ***nakryciem trywialnym*** *nad X z włóknem F jeżeli istnieje homeomorfizm $h : \tilde{X} \to X \times F$ taki, że $p = p_1 \circ h$.*

$$\begin{tikzcd} \tilde{X} \arrow[r, "h"] \arrow[d, "p"'] & X \times F \arrow[dl, "p'"] \\ X & \end{tikzcd} .$$

c) Przekształcenie $p : \tilde{X} \to X$ nazywa się ***nakryciem*** *nad X jeżeli dla każdego punktu $x \in X$ istnieje otoczenie $U_x \ni x$ takie, że obcięcie $p : p^{-1}(U_x) \to U_x$ jest nakryciem trywialnym (z pewnym włóknem dyskretnym F_x.)*

Włóknem nakrycia $p : \tilde{X} \to X$ nad punktem $x \in X$ nazywamy zbiór $p^{-1}(x)$, zaś krotnością nakrycia w punkcie $x \in X$ nazywamy moc włókna nad x. Przestrzeń $\tilde{X}$ nazywamy przestrzenią nakrycia.

Zbiór otwarty $U \subseteq X$ spełniający warunek c) powyższej definicji nazywamy prawidłowo nakrytym.
Z definicji wynika natychmiast, że nakrycie jest przekształceniem "na" oraz jest lokalnym homeomorfizmem, a więc w szczególności przekształceniem otwartym.

Uwaga 1. *Jeżeli przekształcenie $p : \tilde{X} \to X$ jest nakryciem nad spójną przestrzenią X, to włókna nad dowolnymi dwoma punktami przestrzeni X są homeomorficzne, a zatem homeomorficzne z pewną ustaloną przestrzenią dyskretną F, którą nazywamy* **włóknem nakrycia**. *Moc przestrzeni F nazywamy* **krotnością nakrycia**. *Nakrycie, którego włókno jest zbiorem skończonym nazywamy nakryciem skończonym.*

Dowód. Niech $x_0 \in X$ będzie ustalonym punktem. Z definicji nakrycia łatwo widać, że zbiór $\{x \in X\colon\ p^{-1}(x) \cong p^{-1}(x_0)\}$ jest otwarty i jego uzupełnienie też jest otwarte. $\square$

Stwierdzenie 19. *Przekształcenie $p : \tilde{X} \to X$ jest nakryciem trywialnym wtedy i tylko wtedy gdy istnieją parami rozłączne podzbiory otwarte $\tilde{U}_i \subset \tilde{X}$ takie, że $\tilde{X} = \bigcup_{i \in I} \tilde{U}_i$ oraz $p_{|_{\tilde{U}_i}} : \tilde{U}_i \to X$ jest homeomorfizmem.*

Zauważmy, że jeżeli X jest przestrzenią spójną, to zbiory $\tilde{U}_i$ są wyznaczone jednoznacznie, bo są one spójnymi składowymi przestrzeni $\tilde{X}$.

Podamy teraz bardzo ważne przykłady nakryć, związane z teorią funkcji analitycznych, które będą służyły do konstrukcji wielu następnych ważnych przykładów.

Przykład 9. Dla dowolnej liczby całkowitej $n \neq 0$ rozpatrzmy odwzorowanie $p_n : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$ dane wzorem $p_n(z) = z^n$. Prawidłowo nakrytymi zbiorami otwartymi są: $U_1 = \{z \in \mathbb{C}^* : \ \mathrm{Im}(z) \neq 0 \text{ lub } \mathrm{Re}(z) < 0\}$ oraz $U_2 = \{z \in \mathbb{C}^* : \ \mathrm{Im}(z) \neq 0 \text{ lub } \mathrm{Re}(z) > 0\}$, $U_1 \cup U_2 = \mathbb{C}^*$. Krotność nakrycia p_n jest równa $|n|$. Nakrycia p_n nie są trywialne, bowiem przestrzeń nakrywająca $\mathbb{C}^*$ jest spójna.

Przykład 10. Odwzorowanie wykładnicze $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$, $p(z) = \exp(z)$ jest nakryciem. Podobnie jak poprzednio przekształcenie p jest trywialne nad zbiorami U_i , $i = 1, 2$ opisanymi w poprzednim przykładzie. Krotność nakrycia p jest przeliczalna.

3.2 Morfizmy nakryć

Definicja. *Morfizmem nakrycia $p_1 : \tilde{X}_1 \to X_1$ w nakrycie $p_2 : \tilde{X}_2 \to X_2$ nazywamy parę przekształceń $f : X_1 \to X_2$ i $\tilde{f} : \tilde{X}_1 \to \tilde{X}_2$ takie, że $p_2 \circ \tilde{f} = f \circ p_1$, to znaczy przemienny jest diagram:*

$$\begin{tikzcd}
\tilde{X}_1 \arrow[r, "\tilde{f}"] \arrow[d, "p_1"'] & \tilde{X}_2 \arrow[d, "p"] \\
X_1 \arrow[r, "f"] & X_2
\end{tikzcd}.$$

Jeżeli rozpatrujemy nakrycia nad ustaloną przestrzenią X, to morfizmem nakrycia $p_1 : \tilde{X}_1 \to X$ w nakrycie $p_2 : \tilde{X}_2 \to X$ nazywamy przekształcenie $\tilde{f} : \tilde{X}_1 \to \tilde{X}_2$, dla których $p_2 \circ \tilde{f} = p_1$,, to znaczy takich, że przemienny jest diagram:

$$\begin{tikzcd}
\tilde{X}_1 \arrow[rr, "\tilde{f}"] \arrow[dr, "p_1"'] & & \tilde{X}_2 \arrow[dl, "p_2"] \\
& X &
\end{tikzcd}.$$

Zbiór morfizmów nakrycia $p_1 : \tilde{X}_1 \to X$ w nakrycie $p_2 : \tilde{X}_2 \to X$ oznaczamy symbolem $\mathrm{Cov}_X(\tilde{X}_1, \tilde{X}_2)$.

Identyczność oraz złożenie morfizmów nakryć są oczywiście morfizmem nakryć. Izomorfizmem nakryć nazywamy morfizm, który posiada morfizm odwrotny. Oczywiście morfizm $\tilde{f} : \tilde{X}_1 \to \tilde{X}_2$ nakryć nad X jest izomorfizmem wtedy i tylko wtedy, gdy $\tilde{f}$ jest homeomorfizmem.

Przykład 11. *Zauważmy, że nakrycia p_n oraz p_{-n} z przykładu 9 są izomorficzne, a izomorfizm jest zadany przez odwzorowanie $f(z) = z^{-1}$. Zauważmy także, że dla dowolonych $n, m \in \mathbb{Z}$, $p_n \circ p_m = p_{nm}$. Wynika z tego, że dla $k|n$ istnieje morfizm nakrycia p_n w nakrycie p_k.*

Stwierdzenie 20. *Jeżeli* $p_i : \tilde{X}_i \to X$, $i = 1, 2$ *są nakryciami trywialnymi z włóknami* F_1, F_2 *odpowiednio, to istnieje bijekcja zbioru morfizmów* $\mathrm{Cov}_X(\tilde{X}_1, \tilde{X}_2)$ *w zbiór odwzorowań ciągłych* $X \to \mathrm{map}\,(F_1, F_2)$, *gdzie* $\mathrm{map}\,(F_1, F_2)$ *oznacza przestrzeń dyskretną odwzorowań z* F_1 *w* F_2.

Dowód. Jeżeli $\tilde{X}_i$ są nakryciami produktowymi, to $\tilde{f}(x, a) = (x, h(x, a))$, gdzie $h : X \times F_1 \to F_2$ jest odwzorowaniem ciagłym, które jednoznacznie wyznacza ciągłe przekształcenie $\bar{h} : X \to \mathrm{map}\,(F_1, F_2)$, $\bar{h}(x)(a) = h(x, a)$. Teza dla nakryć trywialnych jest już natychmiastowa. □

Jeżeli X jest przestrzenią spójną, to przekształcenie $\bar{h} : X \to \mathrm{map}\,(F_1, F_2)$ jest stałe, czyli morfizm nakryć jest wyznaczony przez odwziriwanie włókien.

Wniosek 9. *Jeżeli* $p_i : \tilde{X}_i \to X$, $i = 1, 2$ *są nakryciami trywialnymi, przekształcenie* $\tilde{f} : \tilde{X}_1 \to \tilde{X}_2$ *ich morfizmem, który jest surjekcją, to* $\tilde{f}$ *jest nakryciem.*

Dowód. Wystarczy udowodnić tezę dla nakryć produktowych. Niech $(x, b) \in X \times F_2$. Niech zgodnie z tezą stwierdzenia morfizmowi $\tilde{f}$ odpowiada ciągłe przekształcenie $\bar{h} : X \to \mathrm{map}\,(F_1, F_2)$. Oznaczmy $\bar{h}(x) = \varphi$. Przestrzeń $\mathrm{map}\,(F_1, F_2)$ jest dyskretna, więc $U = \bar{h}^{-1}(\varphi) \times \{b\}$ jest otwartym otoczeniem (x, b) w $\tilde{X}_2$ i $\tilde{f}^{-1}(U) = U \times \varphi^{-1}(b)$. □

Zauważmy, że jeżeli przestrzeń X jest spójna, to $\bar{h} : X \to \mathrm{map}\,(F_1, F_2)$ jest przekształceniem stałym i morfizm nakryć jest nakryciem trywialnym na każdej składowej spójnej przestrzeni $\tilde{X}_2$.

Stwierdzenie 21. *Jeżeli* $\tilde{f} \in \mathrm{Cov}_X(\tilde{X}_1, \tilde{X}_2)$ *jest morfizmem nakryć i jest surjekcją, to* $\tilde{f} : \tilde{X}_1 \to \tilde{X}_2$ *jest nakryciem. Jeżeli przestrzeń nakrycia* $\tilde{X}_2$ *jest spójna, to każdy morfizm nakryć jest surjekcją.*

Dowód. Niech $\tilde{x} \in \tilde{X}_2$ i niech $U \subset X$ będzie otoczeniem punktu $p_2(x)$ prawidłowo nakrytym przez p_1 i przez p_2. Wówczas $\tilde{f} : p_1^{-1}(U) \to p_2^{-1}(U)$ jest morfizmem nakryć trywialnych i teza wynika z poprzedniego wniosku.

Jeżeli przestrzeń $\tilde{X}_2$ jest spójna, to przestrzeń X jest spójna i morfizm nakryć jest wyznaczony przez ustalone przekształcenie $F_1 \to F_2$ włókien nad wybranym punktem. Przekształcenie $\tilde{f}$ jest surjekcją wtedy i tylko wtedy, gdy to przekształcenie jest "na". Jeżeli nie jest "na", to zbiór punktów leżących w obrazie jest otwarty, a także ten, które do obrazu nie należą jest otwarty, co przeczy spójności $\tilde{X}_2$. □

Wniosek 10. *Morfizm dowolnych nakryć nad tą samą przestrzenią jest izomorfizmem wtedy i tylko wtedy gdy jest bijekcją na każdym włóknie.*

Dowód. Wówczas morfizm jest różnowartościowy i jako nakrycie jest przekształceniem otwartym. □

3.3 Nakrycia pochodzące od działań grup

Niech grupa dyskretna G działa z prawej strony na przestrzeni topologicznej Y. Następujący warunek zapewnia, że rzutowanie na przestrzeń orbit $q : Y \to Y/G$ jest nakryciem.

Definicja. *Mówimy, że działanie grupy dyskretnej* G *na przestrzeni topologicznej* Y *jest* **właściwie dyskretne** *jeżeli*

$$\forall_{y \in Y}\ \exists_{U \ni y}\ \forall_{g \neq e}\ U \cap Ug = \emptyset.$$

Stwierdzenie 22. *Jeżeli działanie grupy dyskretnej* G *na przestrzeni topologicznej* Y *jest właściwie dyskretne, to*

1. *rzutowanie na przestrzeń orbit* $q : Y \to Y/G$ *jest nakryciem*
2. *dla dowolnej podgrupy* $H \subset G$ *odwzorowanie ilorazowe* $q : Y/H \to Y/G$ *jest nakryciem.*

Uwaga 2. *Jeżeli grupa G jest skończona, to działanie jest właściwie dyskretne wtedy i tylko wtedy, gdy jest wolne.*

Przykład 12. Rozpatrzmy działanie grupy $\mathbb{Z}_2 = \{1, t\}$ na sferze $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$, $t(x_1, \ldots, x_n) = (-x_1, \ldots, -x_n)$. Przestrzeń $S^n/\mathbb{Z}_2$ nazywamy n-wymiarowa przestrzenią rzutową i oznaczamy symbolem $\mathbb{R}P^n$. Mamy więc dwukrotne nakrycie $p : S^n \to \mathbb{R}P^n$.

3.4 Konstrukcje nakryć

Opiszemy teraz kilka konstrukcji, pozwalających z danych nakryć konstruować nowe.

Suma rozłączna i iloczyn kartezjański. Niech $p : \tilde{X}_i \to X_i,\ i = 1, 2$ będą dwoma nakryciami. Wtedy suma rozłączna odwzorowań $p_1 \coprod p_2 : \tilde{X}_1 \coprod \tilde{X}_2 \to X_1 \coprod X_2$ oraz ich iloczyn kartezjański $p_1 \times p_2 : \tilde{X}_1 \times \tilde{X}_2 \to X_1 \times X_2$ są też nakryciami.

Obcinanie nakryć. Niech $p : \tilde{X} \to X$ będzie nakryciem oraz $Y \subseteq X$ dowolną podprzestrzenią. Wówczas obcięcie $p_{|_Y} : p^{-1}(Y) \to Y$ jest też nakryciem. Zauważmy, że jeżeli $\tilde{f} : \tilde{X}_1 \to \tilde{X}_2$ jest morfizmem nakryć nad X, to definiuje on morfizm tych nakryć po obcięciu do dowolnego podzbioru $Y \subset X$.

Sklejanie nakryć. Niech $X = U_1 \cup U_2$ będzie sumą podzbiorów otwartych i niech nad każdym z nich będzie dane nakrycie $p_i : \tilde{U}_i \to U_i,\ i = 1, 2$, zaś nad ich częścią wspólną $U_1 \cap U_2$ niech będzie zadany izomorfizm obcięć tych nakryć $h : p_1^{-1}(U_1 \cap U_2) \to p_2^{-1}(U_1 \cap U_2)$. Wtedy przekształcenie $p : \tilde{X}_1 \cup_h \tilde{X}_2 \to X$ dane wzorem $p(\tilde{x}_i) = p_i(\tilde{x}_i)$ dla $\tilde{x}_i \in \tilde{U}_i$ jest nakryciem.

Nakrycia nad bukietem przestrzeni. Nakrycie nad bukietem $X_1 \vee X_2$, $X_1 \cap X_2 = \{x_0\}$ można skleić jak wyżej z nakryć $p_i : \tilde{X}_i \to X_i,\ i = 1, 2$. Wtedy izomorfizm h jest po prostu bijekcją włókien $h : p_1^{-1}(x_0) \xrightarrow{\cong} p_2^{-1}(x_0)$.

3.5 Produkt włóknisty i przeciąganie nakryć.

Uogólnimy konstrukcję obcinania nakrycia opisaną w powyżej.

Definicja. *Niech $f : Y \to X$ i $p : Z \to X$ będą dowolnymi przekształceniami.* ***P****roduktem włóknistym przekształceń f i p nazywamy przestrzeń $f^*Z := \{(y, z) \in Y \times Z : f(y) = p(z)\}$ wraz z odwzorowaniami $p' : f^*Z \to Y$, $p'(y, z) := y$ oraz $f' : f^*Z \to Z$, $f'(y, z) := z$. Odwzorowania te wpisują się w przemienny diagram:*

$$
\begin{tikzcd}
f^*Z \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "p'"] & Z \arrow[d, "p"'] \\
Y \arrow[r, "f"] & X
\end{tikzcd}
.
$$

Produkt włóknisty jest także oznaczany symbolem $Y \times_X Z$.

Uwaga 3. *Łatwo sprawdzić, że $p'^{-1}\{y_0\} = \{y_0\} \times p^{-1}(f(y_0)) \cong p^{-1}(f(y_0))$.*

Produkt włóknisty ma następującą, charakteryzującą go własność:

Stwierdzenie 23. *Niech $f : Y \to X$, $p : Z \to X$ oraz $g : W \to Y$, $h : W \to Z$ będą przekształceniami takimi, że $f \circ g = p \circ h$. Wówczas istnieje dokładnie jedno przekształcenie $k : W \to f^*Z$,* *dla którego $p' \circ k = g$ i $f' \circ k = h$.*

$$\begin{tikzcd}
W \arrow[ddr, "g"'] \arrow[dr, dotted, "k"] \arrow[drr, "h"] & & \\
& f^*Z \arrow[r, "f'"'] \arrow[d, "p'"] & Z \arrow[d, "p"'] \\
& Y \arrow[r, "f"] & X
\end{tikzcd}$$

Dowód. Przekształcenie $k : W \to f^*Z$ jest zadane wzorem $k(w) = (g(w), h(w))$ — jego ciągłość i jednoznaczność są oczywiste. □

Uwaga 4. *Z powyższej własności łatwo widzieć, że jeżeli $f : Y \to X$ i przemienny jest diagram*

$$\begin{tikzcd}
\tilde{X}_1 \arrow[rr, "\tilde{f}"] \arrow[dr, "p_1"'] & & \tilde{X}_2 \arrow[dl, "p_2"] \\
& X &
\end{tikzcd} .$$

to indukuje on przemienny diagram

$$\begin{tikzcd}
f^*\tilde{X}_1 \arrow[rr, "\tilde{f}"] \arrow[dr, "p_1"'] & & f^*\tilde{X}_2 \arrow[dl, "p_2"] \\
& Y &
\end{tikzcd} .$$

przy czym jeżeli $\tilde{g}$ jest homeomorfizmem. to $f^*(\tilde{g})$ także homeomorfizmem.

Odnotujmy jeszcze dwie własności operacji indukowania.

Stwierdzenie 24. *Niech $p : \tilde{X} \to X$.*

a) jeżeli p jest nakryciem trywialnym, a $f : Y \to X$, dowolnym przekształceniem, to $p' : f^*\tilde{X} \to Y$ jest nakryciem trywialnym.

b) jeżeli $i : Y \hookrightarrow X$, jest włożeniem podzbioru, to $i' : i^*\tilde{X} \to i'(i^*\tilde{X}) = p^{-1}(Y)$ jest homeomorfizmem.

Dowód. Jeżeli p jest nakryciem produktowym z włóknem F, to wprost z definicji wynika, że p' jest także nakryciem produktowym z włóknem F. Dla nakryć trywialnych teza wynika z uwagi powyżej. Punkt b) jest oczywisty. □

Wniosek 11. *Jeżeli $p : \tilde{X} \to X$ jest nakryciem, a $f : Y \to X$, dowolnym przekształceniem, to $p' : f^*\tilde{X} \to Y$ jest nakryciem. Ponadto jeżeli p jest nakryciem z włóknem F, to przestrzeń F jest także włóknem nakrycia p'*

Nakrycie $p' : f^*\tilde{X} \to Y$ nazywa się nakryciem indukowanym z nakrycia p przez przekształcenie f lub przeciągnięciem nakrycia p przy pomocy przekształcenia f.

3.6 Zadania

3.6.1. Jeżeli X jest lokalnie spójna, to następujące warunki są równoważne:

1. Odwzorowanie $p : \tilde{X} \to X$ jest nakryciem.
2. Dla każdej składowej spójnej $\tilde{C} \subset \tilde{X}$ obcięcie $p|\tilde{C} : \tilde{C} \to C$ jest nakryciem.
3. Dla każdej składowej spójnej $C \subset X$ obcięcie $p : p^{-1}(C) \to C$ jest nakryciem.

3.6.2. Pokazać, że jeżeli przestrzeń E jest lokalnie łukowo spójna, to $p\colon E \longrightarrow B$ jest nakryciem wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej składowej łukowej $A \subseteq B$, $p_{|p^{-1}(A)}\colon p^{-1}(A) \longrightarrow A$ jest nakryciem. Pokazać, że wówczas przekształcenie p ograniczone do dowolnej składowej łukowej przestrzeni E jest nakryciem pewnej składowej łukowej przestrzeni B. Czy założenie lokalnej łukowej spójności przestrzeni E jest potrzebne?

3.6.3. Pokazać, że jeżeli nakrycie jest homotopijną równoważnością, to jest homeomorfizmem.

3.6.4. Udowodnić stwierdzenie 6.5. Podać przykład ilustrujący, że założenie lokalnej spójności przestrzeni X jest istotne.

3.6.5. Udowodnić, że nakrycie skończone (to znaczy nakrycie, którego włókno jest zbiorem skończonym) jest przekształceniem domkniętym. Podać przykład, że założenie o skończoności włókna jest istotne.

3.6.6. Niech p_1, p_2 będą dwoma przekształceniami dla których zdefiniowane jest złożenie $p_3 = p_1 \circ p_2$. Zbadać, kiedy stąd, że p_i , p_j są nakryciami dla dwóch wskaźników i, j wynika, że p_k jest nakryciem dla trzeciego wskaźnika k.

3.6.7. Udowodnić, że jeżeli $p_i : E_i \longrightarrow X_i$, $i = 1, 2$ są nakryciami to $p_1 \times p_2 : E_1 \times E_2 \longrightarrow X_1 \times X_2$ też jest nakryciem. Wyrazić krotność nakrycia $p_1 \times p_2$, w terminach krotności p_1 i p_2. Czy iloczyn kartezjański nieskończenie wielu nakryć jest nakryciem?

3.6.8. Niech Y będzie spójną przestrzenią Hausdorffa zaś przestrzeń X niech będzie spójna, lokalnie łukowo spójna i zwarta. Udowodnić, że jeżeli $p : X \longrightarrow Y$ jest lokalnym homeomorfizmem, to $p(X) = Y$ i p jest nakryciem. Podać przykład przekształcenia "na" $p : \mathbb{R} \to S^1$, które jest lokalnym homeomorfizmem, ale nie jest nakryciem.

3.6.9. Pokazać, że jeżeli $p : \tilde{X} \to X$ jest nakryciem a $f : Y \to X$ przekształceniem ciągłym i nakrycie $p : X \to Y$ jest trywialne, to nakrycie $p' : f^*\tilde{X} \to Y$ jest trywialne. Czy z trywialności nakrycia $p' : f^*\tilde{X} \to Y$ wynika trywialność nakrycia p? (podać przykład)

3.6.10. Podać przykład ilustrujący, że w konstrukcji sklejania nakryć, opisanej w tym rozdziale, założenie otwartości podzbiorów $U_1 \subseteq X$ i $U_2 \subseteq X$ jest istotne.

Przykłady nakryć.

3.6.11. Wykazać, że przekształcenie $p\colon S^1 \times S^1 \longrightarrow S^1 \times S^1$ dane wzorem: $p(z_1, z_2) = (z_1^2, z_2^3)$ jest nakryciem. Znaleźć jego krotność.

3.6.12. Niech $f \in \mathbb{C}[X]$ będzie wielomianem dodatniego stopnia. Niech $A \subseteq \mathbb{C}$, $A = f(\{z \in \mathbb{C}\colon\ f'(z) = 0\})$. Pokazać, że $f : \mathbb{C} \setminus f^{-1}(A) \longrightarrow \mathbb{C} \setminus A$ jest nakryciem. Jaka jest jego krotność?

3.6.13. Uogólnić poprzednie zadanie na przypadek dowolnej funkcji holomorficznej $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

3.6.14. Wykazać z definicji, że dowolne nakrycie kostki I^n jest trywialne.

3.6.15. Załóżmy, że grupa dyskretna G działa na przestrzeni X w sposób całkowicie dyskretny. Udowodnić, że dla dowolnej podgrupy $H \leqslant G$ naturalne przekształcenie $X/H \longrightarrow X/G$ jest nakryciem.

3.6.16. Niech $\mathbb{H} = \{r + xi + yj + zk\}$ będzie algebrą kwaternionów. Utożsamiamy S^3 z grupą kwaternionów o normie 1, zaś $\mathbb{R}^3$ ze zbiorem urojonych kwaternionów $\{xi + yj + zk\}$. Niech dla $q \in S^3$, $p(q)\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ będzie dane wzorem $p(q)(v) = qvq^{-1}$. Pokazać, że $p(q) \in SO(3)$ oraz $p\colon S^3 \longrightarrow SO(3)$ jest homomorfizmem grup i dwukrotnym nakryciem.

3.6.17. Jeżeli L jest grupą topologiczną a $H \leqslant G \leqslant L$ są jej domkniętymi podgrupami dyskretnymi, to naturalne odwzorowanie $q : L/H \to L/G$ jest nakryciem z włóknem G/H.

Rozdział 4

Nakrycia a algebra dróg

4.1 Podnoszenie przekształceń i własność podnoszenia homotopii

W tym rozdziale udowodnimy własność przekształceń nakrywających podstawową dla ich powiązań z algebrą dróg w przestrzeni.

Definicja. *Podniesieniem przekształcenia $f : Y \to X$ względem przekształcenia $p : \tilde{X} \to X$ nazywa się przekształcenie $\tilde{f} : Y \to \tilde{X}$ takie, że $p \circ \tilde{f} = f$, czyli takie, dla którego diagram*

$$\begin{tikzcd} & \tilde{X} \arrow[d, "p"] \\ Y \arrow[ur, "\tilde{f}"] \arrow[r, "f"'] & X \end{tikzcd}$$

jest przemienny. Przekrojem przekształcenia $p : \tilde{X} \to X$ nazywa się podniesienie identyczności id_X, a więc przekształcenie $s : X \to \tilde{X}$ takie, że $p \circ s = id_X$.

Stwierdzenie 25. *Dla dowolnych przekształceń $f : Y \to X$ i $p : \tilde{X} \to X$ istnieje bijekcja między zbiorem podniesień przekształcenia f względem przekształcenia p, a zbiorem przekrojów przekształcenia $p' : f^*\tilde{X} \to Y$.*

Dowód. Wzajemnie jednoznaczna odpowiedniość między przekrojami przekształcenia a podniesieniami zadana jest wzorem $s(y) = (y, \tilde{f}(y))$, gdzie s jest przekrojem przekształcenia p', a $\tilde{f} : Y \to \tilde{X}$ podninesieniem przekształcenia f. □

Zajmiemy się istnieniem i jednoznacznością podniesień przekształceń względem przekształcenia będącego nakryciem.

Stwierdzenie 26. *Niech $p : \tilde{X} \to X$ będzie nakryciem, a $f : Y \to X$ przekształceniem określonym na przestrzeni spójnej Y. Jeżeli $\tilde{f}, \tilde{f}' : Y \to \tilde{X}$ są dwoma podniesieniami przekształcenia f takimi, że dla pewnego punktu $y_0 \in Y$ zachodzi równość $\tilde{f}(y_0) = \tilde{f}'(y_0)$, to $\tilde{f} = \tilde{f}'$.*

Dowód. Łatwo sprawdzić korzystając z lokalnej trywialności nakrycia, że zbiór $\{y \in Y : \tilde{f}(y) = \tilde{f}'(y)\}$ jest domknięty i otwarty. Ponieważ zawiera punkt y_0, więc jest niepusty, a zatem jest całą przestrzenią Y. □

4.1.1 Twierdzenie o podnoszeniu homotopii

Definicja. *Mówimy, że odwzorowanie $p : \tilde{X} \to X$ ma* ***własność (jednoznacznego) podnoszenia homotopii****, jeżeli dla dowolnej przestrzeni Y i dla dowolnej homotopii $H : Y \times I \to X$ oraz podniesienia $\tilde{h}_0 : Y \times \{0\} \to \tilde{X}$, przekształcenia $H \circ i_0 : Y \times \{0\} \to X$ istnieje (dokładnie jedna) homotopia $\tilde{H} : Y \times I \to \tilde{X}$ taka, że $\tilde{H}_{|_{Y\times\{0\}}} = \tilde{h}_0$ oraz $p \circ \tilde{H} = H$. Wszystkie te przekształcenia wpisują się w przemienny diagram:*

$$\begin{tikzcd} Y \times \{0\} \arrow[r, "\tilde{h}_0"] \arrow[d, "i_0"'] & \tilde{X} \arrow[d, "p"] \\ Y \times I \arrow[r, "H"] \arrow[ur, "\tilde{H}"] & X \end{tikzcd}$$

Definicja. *Mówimy, że odwzorowanie $p : \tilde{X} \to X$ ma* ***własność (jednoznacznego) podnoszenia dróg****, jeżeli dla dowolnej drogi $\omega : I \to X$ oraz dowolnego punktu $\tilde{x}_0 \in \tilde{X}$, dla którego $p(x_0) = \omega(0)$, istnieje (dokładnie jedna)droga $\tilde{\omega} : I \to \tilde{X}$ taka, że $\tilde{\omega}(0) = \tilde{x}_0$ oraz $p \circ \tilde{\omega} = \omega$.*

$$\begin{tikzcd} & \tilde{X} \arrow[d, "p"] \\ I \arrow[r, "\omega"] \arrow[ur, "\tilde{\omega}"] & X \end{tikzcd}$$

Jest jasne, że jeżeli przekształcenie posiada własność (jednoznacznego) podnoszenia homotopii, to posiada własność (jednoznacznego) podnoszenia dróg.

Następujące twierdzenie jest kluczem do związku nakryć nad ustaloną przestrzenią, a grupoidem podstawowym tej przestrzeni.

Twierdzenie 3. *Nakrycia posiadają własność jednoznacznego podnoszenia homotopii.*

Wniosek 12. *Nakrycia posiadają własność jednoznacznego podnoszenia dróg.*

Zauważmy wpierw, że jeżeli podniesienie danej homotopii istnieje, to jest ono jednoznaczne.

Lemat 3. *Niech $p : \tilde{X} \to X$ będzie nakryciem, $H : Y \times I \to X$ homotopią zaś $\tilde{H}$, $\tilde{H}' : Y \times I \to \tilde{X}$ jej podniesieniami takimi, że $\tilde{H}_{|_{Y\times\{0\}}} = \tilde{H}'_{|_{Y\times\{0\}}}$. Wynika z tego, że $\tilde{H} = \tilde{H}'$.*

Dowód. Dla dowolnego punktu $y \in Y$ oba przekształcenia
$\tilde{H}_{|_{\{y\}\times I}} : \{y\} \times I \to \tilde{X}$ oraz $\tilde{H}'_{|_{\{y\}\times I}} : \{y\} \times I \to \tilde{X}$ są podniesieniami przekształcenia $H_{|_{\{y\}\times I}} : (\{y\} \times I) \to X$, przyjmującymi tę samą wartość w punkcie $\{y\} \times \{0\}$. Zatem, wobec spójności odcinka, ze stwierdzenia 26 wynika, że dla każdego $t \in I$, $\tilde{H}(y, t) = \tilde{H}'(y, t)$. □

Dowód istnienia podniesienia dowolnej homotopii poprzedzimy lematem, z którego wynika, że twierdzenie jest prawdziwe "lokalnie", albo inaczej dla "małych" homotopii tzn. takich, których obrazy leżą w "małym zbiorze" nad którym nakrycie jest trywialne.

Lemat 4. *Nakrycie trywialne posiada własność jednoznacznego podnoszenia homotopii.*

Dowód. Zachowując oznaczenia użyte w definicji, pokażemy najpierw tezę lematu dla nakrycia produktowego $p_X : X \times F \to X$. Podniesienie $\tilde{H}$ definiujemy wzorem $\tilde{H}(x,t) := (H(x,t), p_F(\tilde{h}_0(x)))$, gdzie p_F jest rzutowaniem na F. Jeżeli nakrycie jest trywialne to istnieje homeomorfizm $f : \tilde{X} \to X \times F$ nakryć nad X. Podniesienie definiujemy wówczas wzorem: $\tilde{H}(x,t) := f^{-1}(H(x,t), (p_F \circ f \circ \tilde{h}_0)(x))$. $\square$

Dowód. Ciągłość homotopii H oraz zwartość odcinka implikują, że dla każdego punktu $y \in Y$ istnieje otoczenie $V_y \ni y$ oraz (zależna od y) liczba $n \in \mathbb{N}$ taka, że $H(V_y \times [\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}])$, $0 \leq i \leq n-1$ jest zawarty w podzbiorze X nad którym nakrycie p jest trywialne. Konstruujemy indukcyjnie podniesienie $\tilde{H}^i_y : V_y \times [0, \frac{i}{n}] \to \tilde{X}$ spełniające tezę twierdzenia. Istnienie $\tilde{H}^1_y$ wynika bezpośrednio z lematu. Jeżeli $\tilde{H}^i_y : V_y \times [0, \frac{i}{n}] \to \tilde{X}$ jest już określone, to stosujemy lemat do odwzorowania $H : V_y \times [\frac{i}{n}, \frac{i}{n+1}] \to X$ oraz podniesienia $\tilde{H}^i_{y|_{V_y \times \{\frac{i}{n}\}}} \to \tilde{X}$. Otrzymujemy podniesienie przekształcenia $H : V \times [\frac{i}{n}, \frac{i}{n+1}] \to \tilde{X}$ zgodne z zadanym $\tilde{H}^i_y$ na zbiorze $V_y \times \{\frac{i}{n}\}$ co definiuje podniesienie $\tilde{H}^{i+1}_y : V_y \times [0, \frac{i}{n+1}] \to \tilde{X}$. W ten sposób otrzymujemy dla każdego $y \in Y$ odwzorowanie $\tilde{H}_y : V_y \times I \to \tilde{X}$ spełniające tezę twierdzenia. Wystarczy teraz zauważyć, że rodzina odwzorowań $\{\tilde{H}_y\}_{y \in Y}$ definiuje szukane ciągłe podniesienie $\tilde{H}$, gdyż z poprzedniego lematu wynika, że na częściach wspólnych zbiorów rodziny $\{V_y\}_{y \in Y}$ odwzorowania $\{\tilde{H}_y\}_{y \in Y}$ pokrywają się. $\square$

Korzystając z własności jednoznacznego podnoszenia homotopii udowodnimy bardzo ważne twierdzenie o strukturze nakryć nad "walcami", czyli przestrzeniami postaci $X \times I$, powiadające, że nakrycie walca jest walcem.

Wniosek 13. *Niech przekształcenie $p : E \to X \times I$ będzie nakryciem i niech $p_0 : E_0 \to X$ oznacza obcięcie nakrycia p do podprzestrzeni $X \times \{0\} \subset X \times I$. Istnieje dokładnie jeden izomorfizm nakryć*

$$\begin{tikzcd}
E_0 \times I \arrow[rr, "\tilde{f}"] \arrow[dr, "p_0 \times id_I"'] & & E \arrow[dl, "p"] \\
& X \times I &
\end{tikzcd}$$

taki, że $\tilde{f}(e,0) = e$.

Dowód. Rozpatrzmy diagram:

$$\begin{tikzcd}
E_0 \times \{0\} \arrow[r, "j_0"] \arrow[d, "i_0"'] & E \arrow[d, "p"] \\
E_0 \times I \arrow[r, "p_0 \times id_I"] \arrow[ur, dashed, "\tilde{f}"] & X \times I
\end{tikzcd},$$

w którym $j_0(e,0) = e$. Na mocy twierdzenia o podnoszeniu homotopii istnieje dokładnie jedno podniesienie $\tilde{f} : E_0 \times I \to E$ takie, że $\tilde{f}(e,0) = j_0(e,0) = e$ i $p\tilde{f}(e,t) = (p(e), t)$. Wystarczy pokazać, że $\tilde{f}$ jest homeomorfizmem. Przekształcenie $\tilde{f}$ jest morfizmem nakryć nad przestrzenią $X \times I$, więc wystarczy sprawdzić, iż $\tilde{f}$ jest bijekcją na każdym włóknie. Tak jest dla włókien nad dowolnym punktem postaci $(x,0)$, a stąd dzięki jednoznaczności podnoszenia dróg łatwo wynika, że także nad dowolnym punktem $(x,t) \in X \times I$. $\square$

Ten wniosek implikuje ważny bardzo fakt:

Twierdzenie 4. *Niech $p : \tilde{X} \to X$ będzie nakryciem. Jeżeli $f, g : Y \to X$ są przekształceniami homotopijnymi, to nakrycia indukowane $f^*\tilde{X} \to Y$, $g^*\tilde{X} \to Y$ sa izomorficzne.*

Dowód. Niech $H : Y \times I \to X$ będzie homotopią, $H_{|_{Y\times\{0\}}} = f$, $H_{|_{Y\times\{0\}}} = g$. Wówczas nakrycie $H^*\tilde{X} \to Y \times I$ jest izomorficzne z nakryciem $f^*\tilde{X} \times I \to Y \times I$. W szczególności nakrycia nad $Y \times \{1\}$ są izmorficzne, co daje tezę. $\square$

4.2 Nakrycia i grupoid podstawowy

Wiemy już, że nakrycia posiadają własność jednoznacznego podnoszenia dróg. Zauważmy także, że z twierdzenia o podnoszeniu homotopii wynika, że homotopijne drogi mają homotopijne podniesienia, co formułujemy w następującym twierdzeniu.

Twierdzenie 5. *Jeżeli $p : \tilde{X} \to X$ jest nakryciem, to dla dowolnych punktów $x_0, x_1 \in X$ oraz punktu $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$ odwzorowanie indukowane*

$$p_\sharp : \coprod_{\tilde{x}_1 \in p^{-1}(x_1)} \Pi(\tilde{X}; \tilde{x}_0, \tilde{x}_1) \to \Pi(X; x_0, x_1)$$

jest bijekcją.

Dowód. Pokażemy, że przekształcenie odwrotne do $p_\sharp$ jest zadane przez podnoszenie dróg, to znaczy określamy przekształcenie g, $g([\omega]) = [\tilde{\omega}]$, gdzie $\tilde{\omega}$ jest podniesieniem drogi ω o początku w punkcie $\tilde{x}_0$. Zaczynamy od sprawdzenia, że przekształcenie g jest zdefiniowane poprawnie na klasach homotopii dróg. Niech drogi $\tilde{\omega}$, $\tilde{\omega}'$ będą rozpoczynającymi się w punkcie $\tilde{x}_0$ podniesieniami dróg ω i ω', takich że $[\omega] = [\omega']$ w $\Pi(X; x_0, x_1)$. Niech $H : I \times I \to X$ będzie homotopią ustalającą tę równość. Rozważmy diagram:

$$\begin{tikzcd} I \times \{0\} \arrow[r, "\tilde{\omega}"] \arrow[d, "i_0"'] & \tilde{X} \arrow[d, "p"] \\ I \times I \arrow[r, "H"] \arrow[ur, dashed, "\tilde{H}"] & X \end{tikzcd} .$$

Z własności podnoszenia homotopii wynika, że istnieje podniesienie $\tilde{H} : I \times I \to \tilde{X}$ takie, że $p \circ \tilde{H} = H$ oraz $\tilde{H}(\cdot, 0) = \tilde{\omega}$. Pokażemy że homotopia $\tilde{H}$ ustala równość $[\tilde{\omega}] = [\tilde{\omega}']$. Niech $\tilde{\omega}(1) = \tilde{x}_1$. Zauważmy, że homotopia $\tilde{H}$ jest stała na końcach, to jest dla każdego $s \in I$, $\tilde{H}(0, s) = \tilde{x}_0$ i $\tilde{H}(1, s) = \tilde{x}_1$, bowiem droga zawarta we włóknie musi być stała. Wynika z tego, że droga $\tilde{H}(\cdot, 1)$ jest podniesieniem drogi ω' o początku w punkcie $\tilde{x}_0$. Z jednoznaczności podniesienia mamy zatem równość $\tilde{H}(\cdot, 1) = \omega'$, co kończy dowód tego, że $[\tilde{\omega}] = [\tilde{\omega}']$, więc przekształcenie g jest dobrze określone. To, że jest ono odwrotne do przekształcenia $p_\sharp$ jest oczywiste. $\square$

Własność jednoznaczności podnoszenia dróg implikuje następujący ważny związek podnoszenia ze składaniem dróg.

Stwierdzenie 27. *Dla dowolnych dróg $\omega \in P(X; x_0, x_1)$ oraz $\eta \in P(X; x_1, x_2)$ i ich podniesień $\tilde{\omega} \in P(\tilde{X}, \tilde{x}_0, \tilde{x}_1)$ oraz $\tilde{\eta} \in P(\tilde{X}, \tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$ zachodzi równość*

$$\widetilde{\omega \star \eta} = \tilde{\omega} \star \tilde{\eta}$$
$$\widetilde{\omega^{-1}} = \tilde{\omega}^{-1}.$$

Dla dowolnych klas homotopii dróg $[\omega] \in \pi(X; x_0, x_1)$ oraz $[\eta] \in \pi(X; x_1, x_2)$ i ich podniesień $[\tilde{\omega}] \in \pi(\tilde{X}; \tilde{x}_0, \tilde{x}_1)$ oraz $[\tilde{\eta}] \in \pi(\tilde{X}; \tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$ zachodzi równość

$$\widetilde{[\omega] \star [\eta]} = [\tilde{\omega}] \star [\tilde{\eta}]$$
$$\widetilde{[\omega^{-1}]} = [\tilde{\omega}^{-1}].$$

Z powyższego twierdzenia i stwierdzenia wynika od razu bardzo ważny wniosek, który ze względu na jego wagę nazwiemy twierdzeniem.

Twierdzenie 6. *Jeżeli $p : \tilde{X} \to X$ jest nakryciem, to dla punktów $x_0 \in X$ i $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$ homomorfizm grup podstawowych $p_\sharp : \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to \pi_1(X, x_0)$ jest monomorfizmem. Ponadto*

1. *podgrupa $p_\sharp(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)) \leqslant \pi_1(X, x_0)$ składa się dokładnie z klas homotopii tych pętli, których podniesienie jest pętlą.*
2. *jeżeli $\tilde{x}_0' \in p^{-1}(x_0)$ jest innym punktem we włóknie nad punktem x_0, zaś $\tilde{\omega} \in P(\tilde{X}; \tilde{x}_0', \tilde{x}_0)$ drogą w przestrzeni $\tilde{X}$ o początku w punkcie $\tilde{x}_0'$ a końcu w punkcie $\tilde{x}_0$, to*

$$p_\sharp(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0')) = p_\sharp(\tilde{\omega}) \star (p_\sharp(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))) \star p_\sharp(\tilde{\omega})^{-1}.$$

Wniosek 14. *Jeżeli $p : \tilde{X} \to X$ jest nakryciem i $\tilde{X}$ jest przestrzenią łukowo spójną, to nakrycie p wyznacza klasę sprzężoności podgrup grupy $\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$.*
Ponadto krotność nakrycia p jest równa indeksowi $|\pi_1(X, x_0) \colon p_\sharp(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))|$.

Dowód. Pierwsza część wniosku jest natychmiastowa konsekwencja punktu (2) powyższego twierdzenia.
Punktowi $\tilde{x} \in p^{-1}(x_0)$ przyporządkowujemy prawostronną warstwę $p_\sharp(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))[p \circ \tilde{\tau}]$ pętli $[p \circ \tilde{\tau}]$, gdzie $\tilde{\tau}$ jest drogą o początku w punkcie $\tilde{x}_0$ i końcu w punkcie $\tilde{x}$.
Przyporządkowanie to jest bijekcją zbioru $p^{-1}(x_0)$ i zbioru warstw prawostronnych $\pi_1(X, x_0) \backslash p_\sharp(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$.
Zauważmy także, że powyższa bijekcja nie zależy od wyboru drogi łączącej punkt $\tilde{x}_0$ z punktem $\tilde{x}$. □

Przykład 13. Rozpatrzmy nakrycie $S^n \to \mathbb{R}P^n$. Dla $n \geq 2$, S^n jest przestrzenią jednospójną, więc z wniosku powyżej wynika, że $|\pi_1(\mathbb{R}P^2, x_0)| = 2$, a zatem dla $n \geq 2$, $\pi_1(\mathbb{R}P^n, x_0) = \mathbb{Z}_2$.

4.3 Algebraiczne kryterium istnienia podniesienia

Podamy kryterium, w terminach grupy podstawowej, na to by przekształcenie $f : Y \to X$ posiadało podniesienie względem nakrycia $p : \tilde{X} \to X$.

Twierdzenie 7. *Niech $p : (\tilde{X}, x_0) \to (X, x_0)$ będzie nakryciem, $f : Y \to X$ przekształceniem. Niech $y_0 \in Y$, $x_0 = f(y_0)$ i niech $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$. Wówczas:*

1. *jeżeli przekształcenie $f : Y \to X$ ma podniesienie $\tilde{f} : Y \to \tilde{X}$ względem nakrycia p, dla którego $\tilde{f}(y_0) = \tilde{x}_0$ to zachodzi inkluzja*

$$f_\sharp(\pi_1(Y, y_0)) \leqslant p_\sharp(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)).$$

2. *jeżeli przestrzeń Y jest spójna i lokalnie łukowo spójna oraz $f_\sharp(\pi_1(Y, y_0)) \leqslant p_\sharp(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$, to istnieje dokładnie jedno podniesienie $\tilde{f} : Y \to \tilde{X}$ względem nakrycia p, dla którego $\tilde{f}(y_0) = \tilde{x}_0$.*

Dowód. Jeżeli istnieje podniesienie $\tilde{f} : (Y, y_0) \to (\tilde{X}, \tilde{x}_0)$, to mamy równość homomorfizmów indukowanych $p_\sharp \circ \tilde{f}_\sharp = (p \circ \tilde{f})_\sharp = f_\sharp$, a stąd wynika, że im $f_\sharp \subset$ im $p_\sharp$.
Odwrotnie, załóżmy, że zachodzi inkluzja obrazów homomorfizmów indukowamych. Zdefiniujemy przekształcenie $\tilde{f} : (Y, y_0) \to (\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ w następujący sposób: dla dowolnego punktu $y \in Y$ wybierzmy drogę η_y o początku w punkcie y_0 a końcu w punkcie y, a następnie rozważmy drogę $\omega_y = f \circ \eta_y : (I, 0) \to (X, x_0)$ i znajdźmy jej podniesienie $\tilde{\omega}_y : (I, 0) \to (\tilde{X}, \tilde{x}_0)$. Zdefiniujmy $\tilde{f}(y) := \tilde{\omega}_y(1)$. Zaczniemy od sprawdzenia, że wartość $\tilde{f}(y)$ nie zależy od wyboru drogi η_y. Niech η_y' będzie inną drogą łączącą y_0 z y. Wtedy $[\eta_y'] = [\alpha] \star [\eta_y]$, gdzie $[\alpha] \in \pi_1(Y, y_0)$, a

więc $f_\sharp([\eta'_y]) = f_\sharp([\alpha]) \star f_\sharp([\eta_y])$. Z założenia wynika, że istnieje pętla $[\tilde{\beta}] \in \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ taka, że $f_\sharp([\alpha]) = p_\sharp([\tilde{\beta}])$. Z wniosku 27 otrzymujemy, że $[\tilde{\omega}'_y] = [\tilde{\beta} \star \tilde{\omega}_y]$, a więc w szczególności $\tilde{\omega}_y(1) = \tilde{\omega}'_y(1)$. Aby pokazać ciągłość $\tilde{f}$ skorzystamy z lokalnej łukowej spójności. Dla dowolnego otoczenia $\tilde{U} \ni \tilde{f}(y)$ trzeba znaleźć otoczenie $V \ni y$ takie, że $\tilde{f}(V) \subset U$. Możemy założyć, że $p : \tilde{U} \to U \subset X$ jest homeomorfizmem oraz istnieje łukowo spójne otoczenie $V \ni y$ takie, że $f(V) \subset U$. Ustalmy drogę η_y łączącą y_0 z y a dla dowolnego punktu $y' \in Y$ wybierzmy drogę $\gamma_{y'} : (I, 0) \to (V, y)$ taką, że $\gamma_{y'}(1) = y'$. Niech $\eta_{y'} = \eta_y \star \gamma_{y'}$. Rozpatrzmy drogę $\omega_{y'} = f \circ \eta_{y'} = \omega_y \star f \circ \gamma_{y'}$ oraz jej podniesienie $\tilde{\omega}_{y'} = \tilde{\omega}_y \star \widetilde{f \circ \gamma_{y'}}$. Z definicji podniesienia wynika, że $\tilde{f}(y') = \widetilde{f \circ \gamma_{y'}}(1) = p^{-1}(f(y')) \in \tilde{U}$ a więc $\tilde{f}(V) \subset U$ i $\tilde{f}$ jest przekształceniem ciągłym. □

Wniosek 15. *Jeżeli Y jest przestrzenią jednospójną i lokalnie łukowo spójną zaś $p : \tilde{X} \to X$ jest nakryciem, to dla dowolnego przekształcenia $f : Y \to X$ i dowolnych dwóch punktów, $y_0 \in Y$ oraz $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(f(y_0))$ istnieje podniesienie $\tilde{f} : Y \to \tilde{X}$ względem nakrycia p, dla którego $\tilde{f}(y_0) = \tilde{x}_0$.*

4.4 Zadania

4.4.1. Udowodnić, że jeżeli $\tilde{f} : \tilde{X}_1 \to \tilde{X}_2$ jest takim morfizmem nakryć nad łukowo spójną i lokalnie spójną przestrzenią X, że $\tilde{f}$ jest bijekcją włókien nad pewnym punktem $x_0 \in X$, to $\tilde{f}$ jest izomorfizmem nakryć.

4.4.2. Analizując podnoszenie dróg w nakryciu ósemki przy pomocy bukietu trzech okręgów (nad jednym okręgiem z^3, nad drugim z^2 i id) wykazać, że grupa podstawowa ósemki jest nieprzemienna.

4.4.3. Niech $p\colon S^1 \times S^1 \longrightarrow S^1 \times S^1$ będzie nakryciem danym wzorem: $p(z_1, z_2) = (z_1^2, z_2^3)$. Niech $(1,1) \in S^1 \times S^1$ będzie punktem wyróżnionym.

a) Znaleźć krotność tego nakrycia i podgupę

$$p_*(\pi_1(S^1 \times S^1, (1,1))) \leq \pi_1(S^1 \times S^1, (1,1)).$$

b) Niech $q\colon S^1 \times S^1 \longrightarrow S^1 \times S^1$ będzie nakryciem danym wzorem: $q(z_1, z_2) = (z_1^3, z_2^2)$. Zbadać, czy istnieje $h\colon S^1 \times S^1 \longrightarrow S^1 \times S^1$ będące morfizmem nakrycia q w nakrycie p, tzn. $ph = q$.

c) Znaleźć grupę automorfizmów nakrycia p.

4.4.4. Udowodnić, że dla dowolnej jednospójnej przestrzeni Y, każde spójne nakrycie $p : \tilde{X} \to X$ indukuje bijekcję $p_\sharp : [(Y, y_0), (\tilde{X}, \tilde{x}_0)] \xrightarrow{\simeq} [(Y, y_0), (X, x_0)]$. Zauważyć, że jeżeli przestrzeń $\tilde{X}$ jest ściągalna, to każde odwzorowanie $Y \to X$ jest ściągalne.

4.4.5. • Niech $p : \tilde{X} \to X$ będzie nakryciem. Pokazać, że dowolna droga $\omega : I \to X$ zadaje bijekcję $h_\omega : p^{-1}(\omega(0)) \to p^{-1}(\omega(1))$, przy czym złożeniu dróg odpowiada złożenie bijekcji.

4.4.6. Niech $f : Y \to X$ będzie przekształceniem $p : \tilde{X} \to X$ nakryciem, a $q : f^*\tilde{X} \to \tilde{X}$ nakryciem indukowanym. Niech $f(y_0) = x_0$. Pokazać, że $q_\sharp(\pi_1(f^*\tilde{X}, (y_0, \tilde{x}_0))) = f_\sharp^{-1} p_\sharp(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$.

4.4.7. Niech $p : \tilde{X} \to X$ nakryciem. Załóżmy, że mamy przekształcenie nakryć:

$$\begin{tikzcd} \tilde{X} \arrow[r, "\tilde{f}"] \arrow[d, "p"] & \tilde{X} \arrow[d, "p"] \\ X \arrow[r, "f"] & X \end{tikzcd}$$

Pokazać, że jeżeli $f \sim id_X$, to $\tilde{f} : \tilde{X} \to \tilde{X}$ jest homotopijne z pewnym automorfizmem nakrycia $p : \tilde{X} \to X$.

4.4.8. Udowodnić, że jeżeli $f : Y \to X$ jest homotopijną równoważnością, to dla dowolnego nakrycia $\tilde{X} \to X$ odwzorowanie $\tilde{f} : f^*\tilde{X} \to \tilde{X}$ jest homotopijną równoważnością.

4.4.9. • Wykazać, że przekształcenie $f : Y \to X$ przestrzeni spójnych, lokalnie łukowo spójnych indukuje izomorfizm $f_\sharp : \pi_1(Y, y_0) \xrightarrow{\simeq} \pi_1(X, x_0)$ wtedy i tylko wtedy gdy nakrycie indukowane przez f z nakrycia uniwersalnego przestrzeni X jest nakryciem uniwersalnym przestrzeni Y.

4.4.10. • Niech G będzie spójną, lokalnie łukowo spójną grupą topologiczną i niech $e \in G$ będzie elementem neutralnym G. Niech $\tilde{G}$ będzie spójne i $p : \tilde{G} \longrightarrow G$ będzie nakryciem. Niech $h_0 \in \tilde{G}$ będzie takie, że $p(h_0) = e$. Pokazać, że:

a) istnieje dokładnie jedna struktura grupy topologicznej na $\tilde{G}$ taka, że h_0 jest elementem neutralnym i p jest homomorfizmem.

b) jeżeli G jest abelowa, to $\tilde{G}$ także

c) $ker\, p \leq Z(\tilde{G})$

d) grupa automorfizmów nakrycia $p\colon \tilde{G} \longrightarrow G$ jest izomorficzna z $kerp$.

4.4.11. Niech $p : \tilde{X} \to X$ będzie skończonym spójnym nakryciem o krotności większej od 1. Pokazać, że istnieje pętla w przestrzeni X, której żadne podniesienie nie jest pętlą.

Rozdział 5

Klasyfikacja nakryć nad ustaloną przestrzenią

Założenie: Ze względu na wagę twierdzenia o podnoszeniu przekształceń od tego miejsca będziemy zakładać, że wszystkie przestrzenie nad którymi rozpatrywane są nakrycia są **lokalnie łukowo spójne i spójne**. Nie będziemy powtarzać tego założenia w sformułowaniach twierdzeń, ale ono obowiązuje w tym i następnych rozdziałach. Zauważmy, że przestrzeń lokalnie łukowo spójna i spójna jest łukowo spójna.
Dla ustalonej przestrzeni X będziemy rozważać wszystkie nakrycia $p : \tilde{X} \to X$ oraz odwzorowania między nimi. Wybierzmy punkt $x_0 \in X$. Pokażemy, że jeżeli X spełnia pewne lokalne warunki, to nakrycia nad X odpowiadają $\pi_1(X, x_0)$-zbiorom. Oznacza to, że

- każde nakrycie wyznacza $\pi_1(X, x_0)$ zbiór
- morfizmy nakryć są w bijekcji z odwzorowaniami ekwiwariantnymi odpowiadających im $\pi_1(X, x_0)$ zbiorowi co więcej ta bijekcja jest zgodna ze składaniem morfizmów i odwzorowań ekwiwariantnych
- każdy $\pi_1(X, x_0)$ zbiór odpowiada pewnemu nakryciu

Powyższe stwierdzenie można precyzyjnie wyrazić w języku teorii kategorii (Definicja 2) i brzmi ono:

Twierdzenie 8. *Kategoria nakryć nad spójną i lokalnie łukowo spójną przestrzenią X z wyróżnionym punktem x_0 jest równoważna kategorii prawych $\pi_1(X, x_0)$-zbiorów.*

5.1 Włókno jako $\pi_1(X, x_0)$-zbiór

Zaczynamy od definicji funktora z kategorii nakryć nad przestrzenią z wyróżnionym punktem w kategorię prawych $\pi_1(X, x_0)$-zbiorów.

Niech $p : \tilde{X} \to X$ będzie nakryciem i niech $x_0 \in X$ będzie wybranym punktem. Rozpatrzmy zbiór $S := p^{-1}(x_0)$. Zdefiniujemy na nim działanie grupy podstawowej $\pi_1(X, x_0)$ z prawej strony w następujący sposób:

$$\Phi : S \times \pi_1(X, x_0) \to S$$
$$\Phi(\tilde{x}, [\omega]) = \tilde{x} \cdot [\omega] := \tilde{\omega}(1) \in S,$$

gdzie $\tilde{\omega}$ jest podniesieniem pętli ω takim, że $\tilde{\omega}(0) = \tilde{x}$.
Z rozważań poprzedniego rozdziału wynika, że jest to dobrze zdefiniowane działanie i że ma ono następujące własności:

Stwierdzenie 28. *Grupą izotropii punktu* $\tilde{x} \in S$ *jest podgrupa* $p_\sharp \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x})$*, a jego orbitą wszystkie punkty* $\tilde{x}' \in S$ *należące do tej samej składowej łukowej przestrzeni* $\tilde{X}$*, co punkt* $\tilde{x}$*. W szczególności przestrzeń* $\tilde{X}$ *nakrycia* $p : \tilde{X} \to X$ *jest spójna wtedy i tylko wtedy gdy włókno* $p^{-1}(x_0)$ *jest tranzytywnym* $\pi_1(X, x_0)$*-zbiorem.*

W następnym kroku pokazujemy, że zdefiniowany funktor jest bijekcją na zbiorze morfizmów.

Jeżeli $\tilde{f} : \tilde{X}_1 \to \tilde{X}_2$ jest morfizmem nakryć nad X, to jego obcięcie do włókna nad punktem x_0 wyznacza odwzorowanie $\tilde{f} : S_1 \to S_2$, gdzie S_1, S_2 oznaczają włókna nad punktem $x_0 \in X$ w nakryciach $\tilde{X}_1$ i $\tilde{X}_2$ odpowiednio. Okazuje się, że odwzorowanie $\tilde{f}$ jest $\pi_1(X, x_0)$-ekwiwariantne i co więcej każdemu ekwiwariantnemu odwzorowaniu $\pi_1(X, x_0)$-zbiorów S_1 i S_2 odpowiada pewien morfizm nakryć.

Twierdzenie 9. *Dla dowolnych nakryć* $p_i : \tilde{X}_i \to X$*,* $i = 1, 2$ *obcięcie*

$$res : \mathrm{Cov}_X(\tilde{X}_1, \tilde{X}_2) \to \mathrm{Map}_{\pi_1(X,x_0)}(S_1, S_2)$$

jest bijekcją.

Dowód. Sprawdzimy najpierw, że obcięcie wyznacza ekwiwariantne odwzorowanie włókien. Istotnie, jeżeli $\tilde{\omega}$ jest podniesieniem ω o początku w $\tilde{x}$, to $\tilde{f} \circ \tilde{\omega}$ jest podniesieniem pętli ω o początku w punkcie $\tilde{f}(\tilde{x})$. Stąd z definicji wynika, że $\tilde{f}(\tilde{x}) \cdot [\omega] = (\tilde{f} \circ \tilde{\omega})(1) = \tilde{f}(\tilde{\omega}(1)) = f(\tilde{x} \cdot [\omega])$. Zauważmy, że morfizm nakryć jest podniesieniem p_1 względem p_2. Aby wykazać, że res jest różnowartościowe wystarczy zauważyć, że jeżeli $\tilde{f}_{|S_1} = \tilde{f}'_{|S_2}$, to z jednoznaczności podniesienia wynika, że $\tilde{f} = \tilde{f}'$. (Zauważmy, że $\tilde{X}_1$ nie musi być spójne, lecz włókno przecina wszystkie składowe!)

Dla zadanego przekształcenia $\pi_1(X, x_0)$-ekwiwariantnego $f : S_1 \to S_2$ musimy skonstruować rozszerzenie $\tilde{f} : \tilde{X}_1 \to \tilde{X}_2$. Ponieważ $\tilde{X}_1$ jest lokalnie łukowo spójna, więc składowe łukowej spójności $\tilde{X}_1$ są otwarte i wystarczy zdefiniować $\tilde{f}$ na każdej składowej. Niech $\tilde{x}_1 \in S_1$ oraz $\tilde{x}_2 = f(\tilde{x}_1)$. Ponieważ f jest przekształceniem $\pi_1(X, x_0)$-ekwiwariantnym, więc podgrupa izotropii punktu $\tilde{x}_1$ musi być zawarta w podgrupie izotropii punktu $\tilde{x}_2$, a zatem $p_\sharp \pi_1(\tilde{X}_1, \tilde{x}_1) \leqslant p_\sharp \pi_1(\tilde{X}_2, \tilde{x}_2)$. Z twierdzenia 7 wynika istnienie odwzorowania $\tilde{f}$ na składowej łukowej zawierającej punkt $\tilde{x}_1$ takiego, że $\tilde{f}(\tilde{x}_1) = \tilde{x}_2$. Z jednoznaczności podnoszenia łatwo sprawdzić, że otrzymujemy w ten sposób rozszerzenie przekształcenia f. □

Do dowodu twierdzenia 8 pozostało nam pokazanie, że dla dowolnego $\pi_1(X, x_0)$ – zbioru S istnieje nakrycie $p_S : \tilde{X}_S \to X$ oraz ekwiwariantna bijekcja $p^{-1}(x_0) \simeq S$. Odkładamy to do paragrafu 5.3, a teraz przyjrzymy się ważnym wnioskom z twierdzenia 9.

Rozważmy automorfizmy ustalonego nakrycia. Dla nakrycia $p : \tilde{X} \to X$ przez $\mathrm{Aut}_X(\tilde{X})$ będziemy oznaczać grupę jego automorfizmów. Rozpatrzmy przypadek, gdy przestrzeń nakrywająca $\tilde{X}$ jest spójna. Wówczas prawdziwe jest twierdzenie:

Twierdzenie 10. *Jeżeli* $p : \tilde{X} \to X$ *jest nakryciem i* $\tilde{X}$ *jest przestrzenią spójną, to każdy morfizm nakrycia* $p : \tilde{X} \to X$ *w siebie jest jego automorfizmem, czyli*

$$\mathrm{Aut}_X(\tilde{X}) = \mathrm{Cov}_X(\tilde{X}, \tilde{X}).$$

Dowód. Można się łatwo o tym przekonać - wystarczy skorzystać z twierdzenia 9 i zauważyć, że każdy ekwiwariantny morfizm tranzytywnego $\pi_1(X, x_0)$ zbioru jest automorfizmem. □

Dla nakryć spójnych twierdzenie 9 pozwala na łatwe opisanie grupy $\mathrm{Aut}_X(\tilde{X})$. Wybór punktu $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$, wyznacza izomorfizm $p^{-1}(x_0)$ jako $\pi_1(X, x_0)$ zbioru ze zbiorem warstw prawostronnych $p_\sharp \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \backslash \pi_1(X, x_0)$ z działaniem mnożenia z prawej strony. Wobec tego mamy:

Wniosek 16. *Jeżeli* $p : \tilde{X} \to X$ *jest nakryciem spójnym, to wybór punktu* $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$*, wyznacza izomorfizm grup*

$$\mathrm{Aut}_X(\tilde{X}) \cong (N_{\pi_1(X,x)} p_\sharp(\pi_1(\tilde{X},\tilde{x})))/(p_\sharp(\pi_1(\tilde{X},\tilde{x}))).$$

W szczególności, jeżeli $\tilde{X}$ *jest przestrzenią jednospójną, to istnieje izomorfizm*

$$\pi_1(X,x_0) \cong \mathrm{Aut}_X(\tilde{X}).$$

Ostatni wniosek ma kluczowe znaczenie dla obliczania grupy podstawowej; zamiast analizować klasy homotopii pętli w X wystarczy zbadać grupę symetrii jednospójnego nakrycia! Jeżeli prześledzimy określenie izomorfizmów z twierdzenia 9 i wniosku, to izomomorfizm grup $\mathrm{Aut}_X(\tilde{X}) \cong \pi_1(X,x_0)$ przyporządkowuje automorfizmowi $\tilde{f}$ klasę pętli $[p \circ \omega_{\tilde{f}}] \in \pi_1(X,x_0)$, gdzie droga $\tilde{\omega}_{\tilde{f}} : I \to \tilde{X}$ łączy $\tilde{x}_0$ z $f(\tilde{x}_0)$. (Zauważmy , że klasa homotopii drogi $\tilde{\omega}_{\tilde{f}}$ jest jednoznacznie wyznaczona przez końce, bo zakładamy, że $\tilde{X}$ jest jednospójna!).

Przykład 14. Rozpatrzmy $\exp : \mathbb{R} \to S^1$. przestrzeń nakrycia jest ściągalna, a więc tym bardziej jednospójna. Odwzorowanie $\mathbb{Z} \ni n \rightsquigarrow T_n \in \mathrm{Aut}_{S^1}(\mathbb{R})$, gdzie $T_n(t) := t + 2\pi n$ jest oczywiście izomorfizmem. Otrzymujemy stąd, że przyporządkowanie $\mathbb{Z} \ni n \rightsquigarrow [\omega_n] \in \pi_1(S^1, 1)$, gdzie $\omega_n(t) := e^{2\pi i n t}$ jest izomorfizmem grup.

Przykład 15. Rozpatrzmy nakrycie $S^n \to \mathbb{R}P^n$. Dla $n \geq 2$, S^n jest przestrzenią jednospójną i przekształcenie antypodyczne jest jedynym nietrywialnym automorfizmem nakrycia. Mamy więc inny dowód faktu $\pi_1(\mathbb{R}P^n) = \mathbb{Z}_2$.

Grupa $\mathrm{Aut}_X(\tilde{X})$ działa oczywiście z lewej strony na przestrzeni $\tilde{X}$, a także na każdym włóknie $p^{-1}(x)$, $x \in X$.

Twierdzenie 11. *Niech* $p : \tilde{X} \to X$ *będzie spójnym nakryciem. Działanie grupy* $\mathrm{Aut}_X(\tilde{X})$ *na przestrzeni* $\tilde{X}$ *jest właściwie dyskretne a nakrycie* $p : \tilde{X} \to X$ *jest złożeniem nakryć:*

$$\tilde{X} \xrightarrow{q} \tilde{X}/\,\mathrm{Aut}_X(\tilde{X}) \xrightarrow{p'} X\ .$$

Ponadto następujące warunki są równoważne:

a) odwzorowanie p' *jest homeomorfizmem,*

b) działanie $\mathrm{Aut}_X(\tilde{X})$ *na dowolnym włóknie nakrycia jest tranzytywne;*

c) dla dowolnego $\tilde{x} \in \tilde{X}$ *podgrupa* $p_\sharp \pi_1(\tilde{X},\tilde{x}) \trianglelefteq \pi_1(X, p(\tilde{x}))$ *jest normalna.*

Dowód. Niech $\tilde{x} \in \tilde{X}$. Grupa $\mathrm{Aut}_X(\tilde{X})$ permutuje składowe $p^{-1}(U)$, gdzie U jest spójnym dobrze nakrytym otoczeniem $p(\tilde{x})$. Wystarczy więc pokazać, że działanie $\mathrm{Aut}_X(\tilde{X})$ na włóknie zawierającym $\tilde{x}$ jest wolne, lub równoważnie, że działanie grupy $N_{\pi_1(X,x)} p_\sharp(\pi_1(\tilde{X},\tilde{x}))/(p_\sharp(\pi_1(\tilde{X},\tilde{x})))$ na zbiorze warstw prawostronnych $\pi_1(X,x) \backslash p_\sharp(\pi_1(\tilde{X},\tilde{x}))$ jest wolne. To ostatnie stwierdzenie jest jednak oczywiste.

Mamy więc nakrycie $\tilde{X} \xrightarrow{q} \tilde{X}/\,\mathrm{Aut}_X(\tilde{X})$ oraz odwzorowanie ciągłe $\tilde{X}/\,\mathrm{Aut}_X(\tilde{X}) \xrightarrow{p'} X$. Przekształcenie p' jest ciągłe otwarte i "na". Dowód, że jest nakryciem pozostawiamy czytelnikowi (patrz zadanie). Przekształcenie p' jest homeomorfizmem wtedy i tylko wtedy, gdy jest różnowartościowe, czyli wtedy, gdy q utożsamia wszystkie punkty dowolnego włókna, co jest równoważne warunkowi b).
Z twierdzenia 9 i wniosku 16 wynika od razu, że warunki b) i c) są równoważne. □

Definicja. *Nakrycie spójne* $p : \tilde{X} \to X$ *nazywamy* **nakryciem regularnym**, *jeżeli dla pewnego (a zatem dla każdego) punktu* $\tilde{x} \in \tilde{X}$, *podgrupa* $p_\sharp \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}) \trianglelefteq \pi_1(X, p(\tilde{x}))$ *jest normalna.*

Wniosek 17. *Jeżeli* $p : \tilde{X} \to X$ *jest nakryciem regularnym, to grupa* $\operatorname{Aut}_X(\tilde{X})$ *jest izomorficzna z* $\pi_1(X, p(\tilde{x}))/p_\sharp \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x})$.

Widzimy więc, że nakrycie regularne jest rzutowaniem na przestrzeń orbit działania grupy. W następnym paragrafie zobaczymy, że każde całkowicie dyskretne działanie grupy na przestrzeni spójnej prowadzi do nakrycia regularnego. Szczególnie ważne są nakrycia regularne, dla których przestrzeń nakrywająca jest jednospójna.

5.2 Nakrycie uniwersalne

Definicja. *Nakrycie przestrzenią jednospójną nazywamy* **nakryciem uniwersalnym.**

Wniosek 18. *Jeżeli* $p : \tilde{X} \to X$ *jest nakryciem oraz* $\tilde{X}$ *jest przestrzenią jednospójną, to grupa* $\operatorname{Aut}_X(\tilde{X}) = \pi_1(X, x_0)$ *działa na* $\tilde{X}$ *z lewej strony oraz*
$p' : \tilde{X}/\operatorname{Aut}_X(\tilde{X}) \to X$ *jest homeomorfizmem.*

Dowody dwóch kolejnych twierdzeń są natychmiastową konsekwencją twierdzenia o istnieniu i jednoznaczności podniesienia przekształceń i pozostawiamy je czytelnikowi.

Stwierdzenie 29. *Nakrycie uniwersalne przestrzeni* X *jest wyznaczone jednoznacznie z dokładnością do izomorfizmu nakryć.*

Stwierdzenie 30. *Niech* $p : \tilde{X} \to X$ *będzie dowolnym nakryciem uniwersalnym przestrzeni* X, $\tilde{x}_0 \in \tilde{X}$, *zaś* $p' : \tilde{X}' \to X$ *jest dowolnym nakryciem spójnym,* $\tilde{x}'_0 \in \tilde{X}'$ *i* $p(\tilde{x}_0) = p'(\tilde{x}'_0)$. *Wówczas istnieje dokładnie jeden morfizm nakryć* $\tilde{f} : \tilde{X} \to \tilde{X}'$ *dla którego* $\tilde{f}(\tilde{x}_0) = \tilde{x}'_0$

Stwierdzenie powyższe tłumaczy nazwę "uniwersalne" i pokazuje jak ważne jest pytanie o istnienie nakrycia uniwersalnego nad zadaną przestrzenią X.

Definicja. *Powiemy, że w przestrzeni* X *małe pętle są ściągalne, jeżeli istnieje pokrycie przestrzeni* X *zbiorami otwartymi* $\{V_i\}_{i\in I}$ *takie, że dowolna pętla* $\omega : I \to V_i$ *leżąca w pewnym zbiorze* V_i *jest ściągalna w* X.

Uwaga: W literaturze taka przestrzeń nazywa się *pół-lokalnie jednospójną (semi-locally 1-connected),* ale zaproponowana wyżej nazwa wydaje się bardziej intuicyjna.

Dla dowolnego nakrycia, pętla zawarta w otwartym podzbiorze nad którym nakrycie jest trywialne podnosi się do pętli. Wynika z tego warunek konieczny na to, by dla przestrzeni X istniało nad nią nakrycie uniwersalne.

Stwierdzenie 31. *Jeżeli* $\tilde{X} \to X$ *jest nakryciem uniwersalnym, to w przestrzeni* X *małe pętle są ściągalne.*

Twierdzenie 12. *Jeżeli w przestrzeni spójnej i lokalnie łukowo spójnej małe pętle są ściągalne, to istnieje nakrycie uniwersalne* $p : \tilde{X} \to X$.

Dowód powyższego twierdzenia odłożymy do następnego rozdziału, ale istnienie nakrycia uniwersalnego wykorzystamy do dokończenia rozważań o odpowiedniości nakryć nad ustaloną przestrzenią X i $\pi_1(X, x_0)$ – zbiorów. Pozostało nam pokazanie, że dla dowolnego $\pi_1(X, x_0)$ – zbioru S istnieje nakrycie $p_S : \tilde{X}_S \to X$ oraz ekwiwariantna bijekcja $p^{-1}(x_0) \simeq S$.

5.3 "Skręcony" produkt G-przestrzeni

Definicja. *Niech G będzie grupą działającą z prawej strony na przestrzeni S oraz z lewej strony na przestrzeni T. Na zbiorze $S \times T$ definiujemy działanie z prawej strony wzorem $(s,t)g := (sg, g^{-1}t)$.* **Produktem skręconym G-przestrzeni** *nazywamy przestrzeń orbit tego działania: $S \times_G T := (S \times T)/G$. Produkt skręcony oznaczamy symbolem $S \times_G T$.*

Uwaga 5. *Zauważmy, że równoważnie można określić produkt skręcony $S \times_G T$ jako przestrzeń otrzymaną w wyniku podzielenia $S \times T$ przez najmniejszą relację równoważności zawierającą relacje $(sg,t) \sim (s,gt)$ dla $s \in S$, $t \in T$, $g \in G$.*

Przykład 16. Jeżeli $S = H\backslash G$ jest zbiorem warstw prawostronnych względem podgrupy H z działaniem mnożenia z prawej strony, to $H\backslash G \times_G T \cong T/H$. W szczególności jeżeli $H = \{1\}$, to $G \times_G T \cong T$, a jeżeli $H = G$, to $\{*\} \times_G T \cong T/G$. Analogicznie, jeżeli $T = G/H$, to $S \times_G G/H \cong S/H$ jest przestrzenią orbit działania podgrupy H na przestrzeni S.

Uwaga 6. *Niech $p : T \to T/G$ będzie przekształceniem na przestrzeń orbit działania G na T. Zauważmy, że dobrze zdefiniowane jest przekształcenie*

$$p_S : S \times_G T \to T/G$$

zadane wzorem $p_S([(s,t)]) = [t]$. Wowczas $p_S^{-1}([t]) = S \times_G p^{-1}([t])$. Wybór punktu $t_0 \in p^{-1}[t]$ w orbicie definiuje izomorfizm

$$p_S^{-1}([t]) \cong S \times_G G/G_{t_0} \cong S/G_{t_0}.$$

Odnotujmy szczególny przypadek powyższych rozważań. Załóżmy, że działanie grupy G na przestrzeni T jest wolne i rozpatrzmy $p_S : S \times_G T \to T/G$. Wówczas dla każdego punktu $[t] \in T/G$, $p_S^{-1}([t]) \cong S$. Możemy więc powiedzieć, że operacja skręconego produktu w miejsce każdej wolnej orbity "wstawiła" przestrzeń S.

Wykorzystamy teraz "skręcony" produkt do zbudowania nakrycia odpowiadającego danemu $\pi_1(X, x_0)$ – zbiorowi.

- Niech $p : \tilde{X}_\pi \to X$ oznacza nakrycie uniwersalne (dla uproszczenia zapisu oznaczenie $\pi_1(X,x_0)$ zastępujemy przez π). Zgodnie z twierdzeniem 10.7, przestrzeń $\tilde{X}_\pi$ jest lewym $\pi_1(X,x_0)$ – zbiorem, $\tilde{X}_\pi/\pi_1(X,x_0) \cong X$ i przekształcenie p jest rzutowaniem na przestrzeń orbit.

- Niech $\tilde{x}_0 \in \tilde{X}_\pi$ będzie wyróżnionym punktem, $p(\tilde{x}_0) = x_0$.

- Niech S będzie prawym $\pi_1(X,x_0)$ – zbiorem.

Zdefiniujemy przestrzeń $\tilde{X}_S := S \times_\pi \tilde{X}_\pi$ oraz odwzorowanie $p_S : \tilde{X}_S \to X$ wzorem $p_S([s,\tilde{x}]) := p(\tilde{x})$.

Stwierdzenie 32. *Odwzorowanie $p_S : \tilde{X}_S \to X$ jest nakryciem. Ponadto $\pi_1(X,x_0)$ – zbiór przyporządkowany nakryciu $p_S : \tilde{X}_S \to X$ jest ekwiwariantnie izomorficzny z S.*

Dowód. Z definicji natychmiast wynika, że dla dowolnego podzbioru $U \subset X$, $p_S^{-1}(U) = S \times_\pi p^{-1}(U)$. Jeżeli U jest zbiorem, nad którym nakrycie uniwersalne $p : \tilde{X}_\pi \to X$ jest trywialne, to wybór punktu $\tilde{x}_0$ zadaje ekwiwariantny homeomorfizm $\pi_1(X,x_0)$ – przestrzeni

$$h : p^{-1}(U) \to U \times \pi_1(X, x_0),$$

gdzie działanie na U jest trywialne, a działanie na $\pi_1(X, x_0)$ jest mnożeniem z lewej strony. Niech $pr_\pi : U \times \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(X, x_0)$ oznacza rzutowanie. Definiujemy przekształcenie

$$h_U : S \times_\pi p^{-1}(U) \to U \times S$$

wzorem

$$h_U([s, \tilde{x}]) := (p(\tilde{x}), (s)pr_\pi h(\tilde{x})).$$

Łatwo sprawdzić, że przekształcenie h_U jest homeomorfizmem i przemienny jest diagram

$$\begin{tikzcd} p_S^{-1}(U) = S \times_\pi p^{-1}(U) \arrow[rr, "h_U"] \arrow[dr, "p_S"'] & & U \times S \arrow[dl, "pr_U"] \\ & U & \end{tikzcd} ,$$

co dowodzi, że odwzorowanie p_S jest nad U nakryciem trywialnym z włóknem S.

Wybrany punkt $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$ ustala bijekcję zbiorów $\varphi : S \to p_S^{-1}(x_0)$ zadaną wzorem $\varphi(s) = [s, \tilde{x}_0]$. Pozostaje pokazać, że bijekcja φ jest ekwiwariantna. Niech $\omega : I \to X$ będzie pętlą zaczepioną w punkcie $x_0 \in X$ a $\tilde{\omega} : I \to \tilde{X}_\pi$ jej podniesieniem do $\tilde{X}_\pi$ o początku w punkcie $\tilde{x}_0$. Wzór $\tilde{\omega}_S(t) = [s_0, \tilde{\omega}(t)]$ definiuje podniesienie pętli ω do $\tilde{X}_S$ o początku w punkcie $[s_0, \tilde{x}_0]$. Zgodnie z definicją działania $\pi_1(X, x_0)$ na $p_S^{-1}(x_0)$:

$$[s_0, \tilde{x}_0]\omega = \tilde{\omega}_S(1) = [s_0, \tilde{\omega}(1)] = [s_0\, , \, [\omega]\tilde{x}_0] = [s_0[\omega]\, , \, \tilde{x}_0]$$

. $\square$

5.4 Twierdzenie o klasyfikacji nakryć

Na koniec sformułujmy będące wnioskiem z powyższych rozważań twierdzenie o klasyfikacji spójnych nakryć nad ustaloną przestrzenią spójną, lokalnie łukowo spójną w której małe pętle są ściągalne. Czynimy to ze względu na podobieństwo (nie przypadkowe!) ze sformułowaniem twierdzenia Galois o rozszerzeniu ciał.

Twierdzenie 13. *Niech $p : \tilde{X}_\pi \to X$ będzie ustalonym nakryciem uniwersalnym przestrzeni X. Niech $\tilde{x}_0 \in \tilde{X}_\pi$, $p(\tilde{x}_0) = x_0$ wyznacza izomorfizm grupy $Aut\tilde{X}_\pi$ i $\pi_1(X, x_0)$.*

a) Niech H będzie podgrupą grupy $\pi_1(X, x_0)$. Niech $p_H : \tilde{X}_\pi/H \to X$ będzie przekształceniem indukowanym przez p i lewostronne działanie $\pi_1(X, x_0)$ na $\tilde{X}_\pi$. Wówczas $p_H : \tilde{X}_\pi/H \to X$ jest nakryciem i H jest obrazem homomorfizmu $p_{H\sharp} : \pi_1(\tilde{X}_\pi/H, [\tilde{x}_0]) \to \pi_1(X, x_0)$.

b) Nakrycie $p_H : \tilde{X}_\pi/H \to X$ jest regularne wtedy i tylko wtedy gdy H jest normalną podgrupą $\pi_1(X, x_0)$.

c) Jeżeli $q : \tilde{Y} \to X$ jest spójnym nakryciem, $q(y_0) = x_0$ i H jest obrazem homomorfizmu $q_\sharp : \pi_1(\tilde{Y}, \tilde{y}_0) \to \pi_1(X, x_0)$, to istnieje dokładnie jeden izomorfizm nakryć $\tilde{f} : \tilde{X}_\pi/H \to \tilde{Y}$ dla którego $\tilde{f}(p_H(\tilde{x}_0)) = \tilde{y}_0$.

Dowód jest oczywisty, gdyż $H\backslash G \times_G \tilde{X}_\pi = \tilde{X}_\pi/H$.

5.5 Konstrukcja nakrycia uniwersalnego

Podamy teraz dowód twierdzenia 9.11, a więc konstrukcję jednospójnego nakrycia dowolnej spójnej, lokalnie łukowo spójnej przestrzeni, w której małe pętle są ściągalne. Zachowujemy oznaczenia poprzedniego paragrafu. Aby lepiej umotywować konstrukcję użytą w dowodzie załóżmy, że $p : \tilde{X}_\pi \to X$ jest jednospójnym nakryciem i spróbujemy odtworzyć przestrzeń $\tilde{X}_\pi$ z danych o przestrzeni X. Wybierzmy punkt $\tilde{x}_0 \in \tilde{X}_\pi$ i niech $x_0 = p(\tilde{x}_0)$. Rozpatrzmy zbiór $P(X, x_0)$ składający się ze wszystkich dróg, które zaczynają się w punkcie x_0. Rozpatrzmy odwzorowanie zbiorów $q : P(X, x_0) \to \tilde{X}_\pi$ zdefiniowane jak następuje: dla drogi $\omega \in P(X, x_0)$ wybieramy jej podniesienie $\tilde{\omega}$ o początku w punkcie $\tilde{x}_0$. Połóżmy $q(\omega) := \tilde{\omega}(1)$. Ponieważ przestrzeń $\tilde{X}_\pi$ jest łukowo spójna, więc odwzorowanie q jest surjekcją. Zbadajmy kiedy $\tilde{\omega}(1) = q(\omega) = q(\eta) = \tilde{\eta}(1)$. Zauważmy, że skoro początki i końce podniesień są równe a przestrzeń $\tilde{X}_\pi$ jest jednospójna, to drogi $\tilde{\omega}$ i $\tilde{\eta}$ są homotopijne względem końców, a więc także drogi $\omega = p \circ \tilde{\omega}$ oraz $\eta = p \circ \tilde{\eta}$ są homotopijne. Odwrotnie, z twierdzenia 8.1 wynika, że jeżeli drogi ω i η są homotopijne, to ich podniesienia mają wspólny koniec.

Podsumowując powyższe otrzymujemy bijekcję $q : P(X, x_0)/\!\sim\, \to \tilde{X}_\pi$, gdzie $\sim$ jest relacją homotopii dróg względem końców.

Dowód. twierdzenia 10.6 Określmy zbiór $\tilde{X}_\pi := P(X, x_0)/\sim$ i odwzorowanie $p(\omega) = \omega(1)$. Pozostaje zdefiniować topologię w zbiorze $\tilde{X}_\pi$ tak, aby p było nakryciem i wykazać jednospójność $\tilde{X}_\pi$ w tej topologii.

Dla zbioru otwartego $U \subset X$ oraz drogi $\omega \in P(X, x_0)$ takiej, że $\omega(1) \in U$ definiujemy zbiór $\langle \omega, U \rangle := \{\omega \star \eta :\ \eta : I \to U\, ,\ \eta(0) = \omega(1)\}$; tak samo będziemy oznaczać jego obraz w zbiorze ilorazowym $\tilde{X}_\pi$.

Sprawdzimy, że zbiory $\{\langle \omega, U \rangle : \omega \in P(X, x_0)\, , U \ni \omega(1)\}$ tworzą bazę pewnej topologii w $\tilde{X}_\pi$. Wystarczy zauważyć, że dla dowolnych dwóch zbiorów $\langle \omega, U \rangle$, $\langle \omega', V \rangle$ oraz klasy drogi $[\alpha] \in \langle \omega, U \rangle \cap \langle \omega', V \rangle$ zachodzi inkluzja $[\alpha] \in \langle \alpha, U \cap V \rangle \subset \langle \omega, U \rangle \cap \langle \omega', V \rangle$. Odwzorowanie p jest surjekcją i jest ciągłe w tej topologii, bowiem dla każdego $U \ni p([\omega]) = \omega(1)$ mamy $\langle \omega, U \rangle \subset p^{-1}(U)$. Odwzorowanie p jest także otwarte, bo jeżeli U jest otoczeniem łukowo spójnym to $p(\langle \omega, U \rangle) = U$. Co więcej, jeżeli U jest podzbiorem łukowo spójnym takim, że pętle mieszczące się w U są ściągalne w X, to $p : \langle \omega, U \rangle \to U$ jest bijekcją, a więc homeomorfizmem.
Stąd już wynika, że p jest nakryciem. Niech $U \subset X$ będzie łukowo spójnym podzbiorem otwartym, takim że każda pętla w U jest ściągalna w X. Wybierzmy dowolną drogę $\omega \in P(X, x_0)$ kończącą się w U. Istnieje bijekcja $p^{-1}(U) = \coprod_{\gamma \in \pi} \langle \gamma \star \omega, U \rangle$. Ponieważ p jest homeomorfizmem na każdym zbiorze $\langle \gamma \star \omega, U \rangle$, więc wynika stąd, że p jest nakryciem trywialnym nad U. Pozostaje sprawdzić, że przestrzeń $\tilde{X}_\pi$ jest jednospójna. Jest ona łukowo spójna, bowiem dowolną klasę drogi $[\omega]$ można połączyć z klasą drogi stałej $[\omega_{x_0}]$ w x_0 przy pomocy drogi $\tilde{\omega}$, $\tilde{\omega}(t)(s) = [\omega\,(ts)]$ (sprawdzić ciągłość odwzorowania $\tilde{\omega} : I \to \tilde{X}_\pi$).

Żeby zakończyć dowód jednospójności $\tilde{X}_\pi$, na mocy wniosku 8.3 a), wystarczy pokazać, że podniesienie dowolnej pętli w X, która nie jest ściągalna, nie jest pętlą. Zauważmy, że zdefiniowana wyżej droga $\tilde{\omega}$ jest podniesieniem drogi ω, bo $p([\tilde{\omega}(t)]) = \tilde{\omega}(t)(1) = \omega(t)$. Jeżeli pętla ω nie jest ściągalna, to pętla stała $\tilde{\omega}(0) = [\omega_{x_0}]$ nie jest homotopijna z pętlą $[\omega] = \tilde{\omega}(1)$, co oznacza, że $\tilde{\omega}(0) \neq \tilde{\omega}(1)$. □

5.6 Zadania

5.6.1. Niech $\tilde{X} \to X$ będzie nakryciem uniwersalnym. Wówczas na włóknie $p^{-1}(x_0)$ działa grupa $Aut_X(\tilde{X}) = \pi_1(X, x_0)$ z lewej strony. Grupa $\pi_1(X, x_0)$ działa na włóknie nad x_0 także z prawej strony. Pokazać, że działania te pokrywaja sie wtedy i tylko wtedy, gdy grupa $\pi_1(X, x_0)$ jest przemienna.

Dowód. Dane jest nakrycie uniwersalne $p : \tilde{X} \longrightarrow X$. Wówczas, dla każdego punktu $x_0 \in X$, włókno $p^{-1}(x_0)$ jest prawym $\pi_1(X, x_0)$-zbiorem. Dla klasy homotopii pętli $[\omega] \in \pi_1(X, x_0)$ i punktu $\tilde{x} \in p^{-1}(x_0)$ definiujemy

$$\tilde{x} \cdot [\omega] = \tilde{\omega}(1)$$

gdzie $\tilde{\omega}$ jest podniesieniem pętli ω o początku w $\tilde{x}$.

Z drugiej strony, włókno nad punktem $x_0 \in X$ jest także lewym $\pi_1(X, x_0)$-zbiorem (o ile nakrycie jest uniwersalne). Rzeczywiście, grupa automorfizmów $Aut_X(\tilde{X})$ działa z lewej strony na włóknie $p^{-1}(x_0)$. Grupę tę możemy jednak utożsamić z grupą $\pi_1(X, x_0)$ przez wybór punktu $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$. Można na to patrzeć następująco: klasa homotopii pętli $[\omega]$ o początku w x_0 wyznacza ekwiwariantny morfizm włókna $p^{-1}(x_0) \longrightarrow p^{-1}(x_0)$, który posyła wybrany punkt na $\tilde{x}_0$ na $\tilde{x}_0 \cdot [\omega]$, a resztę punktów we włóknie tak jak trzeba, to znaczy punkt $\tilde{x} \in p^{-1}(x_0)$, gdzie $\tilde{x} = \tilde{x}_0 \cdot [\eta]$ dla pewnego (dokładnie jednego dzięki jednospójności!) $[\eta] \in \pi_1(X, x_0)$, poślemy na $[\omega] \cdot (\tilde{x}_0 \cdot [\eta]) = ([\omega] \cdot \tilde{x}_0) \cdot [\eta] = \tilde{x}_0 \cdot ([\omega] \cdot [\eta])$. Wiemy, że takiemu morfizmowi odpowiada automorfizm nakrycia, który działa na włóknie $p^{-1}(x_0)$ z lewej strony dokładnie tak jak to opisaliśmy.

Widać stąd natychmiast, że oba działania pokrywają się wtedy i tylko wtedy, gdy dla $[\omega], [\eta] \in \pi_1(X, x_0)$ mamy $[\omega] \cdot [\eta] = [\eta] \cdot [\omega]$:

$$[\omega] \cdot \tilde{x} = \tilde{x} \cdot [\omega] \iff \tilde{x}_0 \cdot ([\omega] \cdot [\eta]) = \tilde{x}_0 \cdot ([\eta] \cdot [\omega])$$

Ostatnia równość oznacza że podniesienia pętli $\omega \star \eta$ oraz $\eta \star \omega$ (o początku w $\tilde{x}_0$) są homotopijne (jednospójność przestrzeni $\tilde{X}$), a więc i one same są homotopijne.

Karol Janowicz

□

5.6.2. Niech $p \colon \tilde{X} \to X$ będzie nakryciem przestrzeni spójnej odpowiadającym $\pi_1(X, x_0)$ – zbiorowi S. Niech $f \colon Y \to X$ będzie przekształceniem ciągłym, $f(y_0) = x_0$. Wykazać, że nakrycie indukowane przez f odpowiada zbiorowi S z działaniem grupy podstawowej $\pi_1(Y, y_0)$ wyznaczonym przez homomorfizm indukowany $f_\sharp \colon \pi_1(Y, y_0) \to \pi_1(X, x_0)$. Podać warunek konieczny i dostateczny na to, by nakrycie indukowane było spójne. Pokazać, że homotopijne odwzorowania indukują izomorficzne nakrycia.

5.6.3. Znaleźć nakrycie $S^1 \vee S^1$ odpowiadające komutantowi $\pi_1(S^1 \vee S^1, *)$.
Wskazówka: rozpatrzeć nakrycie $S^1 \vee S^1$ indukowane przez włożenie $S^1 \vee S^1 \longrightarrow S^1 \times S^1$ i nakrycie uniwersalne torusa.

5.6.4. Opisać nakrycie uniwersalne $S^1 \vee S^1$.

5.6.5. Opisać wszystkie spójne nakrycia następujących przestrzeni: S^1, S^2, $S^1 \vee S^2$, $S^1 \times S^1$.

5.6.6. Niech G będzie podgrupą izometrii płaszczyzny euklidesowej $\mathbb{R}^2$ generowaną przez przekształcenia $f(x, y) = (x + 1, y)$ i $g(x, y) = (1 - x, y + 1)$. (patrz zad.3.12)

a) Znaleźć nakrycie odpowiadające podgrupie generowanej przez f. Czy jest ono regularne? Jaka jest jego krotność?

b) Znaleźć dwukrotne nakrycie butelki Kleina, tak by przestrzenią nakrywającą był torus. Jakiej podgrupie grupy G odpowiada znalezione nakrycie? Czy każde dwa dwukrotne nakrycia butelki Kleina torusem są izomorficzne?

c) Czy dla każdego dwukrotnego nakrycia butelki Kleina przestrzeń nakrywająca jest homeomorficzna z torusem?

d) Znaleźć nieregularne nakrycie butelki Kleina.

e) Czy istnieje nakrycie butelki Kleina przy pomocy płaszczyzny rzutowej?

f) Znaleźć nakrycie butelki Kleina odpowiadające komutantowi $[G, G]$.

5.6.7. Udowodnić, że jeżeli przestrzeń spójna, lokalnie łukowo spójna w której małe pętle są ściągalne posiada nakrycie, którego przestrzeń jest homotopijnie równoważna z grafem, to nakrycie uniwersalne tej przestrzeni jest ściągalne.

Rozdział 6

G – nakrycia

W poprzednich rozdziałach badaliśmy wszystkie nakrycia nad ustaloną przestrzenią X. Wśród nich oddzielną klasę stanowiły te, dla których działanie grupy automorfizmów nakrycia było tranzytywne. Dla tych klas nakryć przekształcenie nakrywające było, z dokładnością do homeomorfizmu, tożsame z projekcją na przestrzeń orbit. Spojrzymy na tę sytuację w nieco inny sposób, Dla ustalonej grupy G i ustalonej przestrzeni X będziemy szukać działań lewostronnych, których przestrzenie orbit są homeomorficzne z X.

6.1 G – nakrycia nad ustaloną przestrzenią

Najprostszy przykład jest następujący: rozważamy przestrzeń $X \times G$ z działaniem danym wzorem: $g(x,h) := (x, gh)$.

Definicja. *Niech G będzie grupą a $p : \tilde{X} \to X$ będzie nakryciem. Powiemy, że p jest G-nakryciem jeżeli na przestrzeni $\tilde{X}$ jest zadane wolne działanie (z lewej strony) grupy G, oraz istnieje homeomorfizm $h : \tilde{X}/G \xrightarrow{\cong} X$ taki, że $h \circ q = p$, gdzie $q : \tilde{X} \to \tilde{X}/G$ jest rzutowaniem na przestrzeń orbit działania.*

$$\begin{tikzcd} & \tilde{X} \arrow[dl, "q"'] \arrow[dr, "p"] & \\ \tilde{X}/G \arrow[rr, "h"] & & X \end{tikzcd}$$

Zauważmy, że wolne działanie spełniające warunki powyższej definicji musi być całkowicie dyskretne.

Stwierdzenie 33. *Jeżeli $p : \tilde{X} \to X$ jest spójnym G – nakryciem, to jest ono nakryciem regularnym i istnieją naturalne izomorfizmy grup*

$$G \simeq \mathrm{Aut}_X(\tilde{X}) \simeq \pi_1(X, p(\tilde{x}))/p_\sharp \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}),\ \tilde{x} \in \tilde{X}.$$

Dowód. Zdefiniujemy odwzorowanie $G \ni g \rightsquigarrow \tilde{X} \xrightarrow{g} \tilde{X} \in \mathrm{Aut}_X(\tilde{X})$, które z definicji działania grupy jest homomorfizmem $G \to Aut_X(\tilde{X})$, a ponieważ działanie jest wolne, także monomorfizmem. Sprawdzimy, że jest to epimorfizm. Niech $f : \tilde{X} \to \tilde{X}$ będzie automorfizmem nakrycia. Wybierzmy punkt $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$ i jego obraz $f(\tilde{x}_0)$. Działanie grupy G na włóknie $p^{-1}(x_0)$ jest tranzytywne, więc istnieje element $g \in G$ taki, że $g\tilde{x}_0 = f(\tilde{x}_0)$. Ze spójności $\tilde{X}$ i z twierdzenia o jednoznaczności podniesienia wynika, że $f = g$. Zatem przestrzeń orbit $\tilde{X}/\mathrm{Aut}_X(\tilde{X})$ jest homeomorficzna z X. Teza wynika z Twierdzenia 11 i Wniosku 17. $\square$

Spójne G – nakrycie nad X wyznacza zatem normalną podgrupę grupy podstawowej, dla której grupa ilorazowa jest izomorficzna z G. Struktura G - nakrycia jest jednak bogatsza niż tylko przekształcenie nakrywające, tzn. rzutowanie na przestrzeń orbit. Zacznijmy od definicji.

Definicja. *Morfizmem G-nakryć (lub G– morfizmem) nad X nazywamy G-ekwiwariantne przekształcenie* $f : \tilde{X}_1 \to \tilde{X}_2$ *takie, że* $p_1 = p_2 \circ f$. *Zbiór G – morfizmów będziemy oznaczać* $\mathrm{Cov}_{G,X}(\tilde{X}_1, \tilde{X}_2)$.

Morfizm G-nakryć nad X nazywamy G – izomorfizmem, jeżeli ma G – morfizm odwrotny.

Jest jasne, że $\mathrm{Cov}_{G,X}(\tilde{X}_1, \tilde{X}_2) \subseteq \mathrm{Cov}_X(\tilde{X}_1, \tilde{X}_2)$. Zauważmy też, że każdy G – morfizm nakryć spójnych jest G – izomorfizmem, bo wyznacza bijekcję na włóknach i morfizm odwrotny jest oczywiście ekwiwariantny.
Rozpatrzmy przykłady:

Przykład 17. Jeżeli oba G-nakrycia $\tilde{X}_i \to X$, i=1,2 są nakryciami trywialnymi $X_i = X \times G$, to dowolne przekształcenie zbioru $G \to G$ wyznacza ich morfizm. Jednak G – morfizmów jest znacznie mniej, bo tyle ile elementów grupy G – obraz dowolnego punktu postaci $(x, 1)$ wyznacza już przekształcenie ekwiwariantne.

Przykład 18. Niech $\mathbb{Z}_3 = \{1, \rho, \rho^2\}$. Niech $\zeta = exp\frac{2\pi i}{3}$. Rozważmy dwa działania $\mathbb{Z}_3$ na sferze S^1: w pierwszym automorfizm wyznaczony przez generator ρ jest mnożeniem przez ζ a w drugim mnożeniem przez ζ^2. Oba działania prowadzą do trzykrotnego nakrycia regularnego $S^1 \to S^1$ odpowiadającego podgrupie $3\mathbb{Z} \leqslant \mathbb{Z} = \pi_1(S^1)$. Nakrycia te są izomorficzne, ale nie jako G–nakrycia, gdyż żaden z trzech izomorfizmów nakryć nie jest ekwiwariantny.

6.2 G – nakrycia a grupa podstawowa

Dla dalszych rozważań ustalmy grupę G, przestrzeń X z punktem wyróżnionym $x_0 \in X$.

Twierdzenie 14. *Niech* $p : \tilde{X} \to X$ *będzie G-nakryciem. Wówczas*

a) Wybór punktu $\tilde{x} \in \tilde{X}$, $\tilde{x} \in p^{-1}(x_0)$ *definiuje homomorfizm*

$$\varphi_{\tilde{x}} : \pi_1(X, x_0) \to G.$$

b) Jeżeli $\tilde{x}, \tilde{x}' \in \tilde{X}$, $\tilde{x}, \tilde{x}' \in p^{-1}(x_0)$, *to wyznaczone przez te punkty homomorfizmy różnią się o automorfizm wewnętrzny grupy* G, *to znaczy istnieje element* $g \in G$, *taki że* $\varphi_{\tilde{x}'} = (g \cdot g^{-1}) \circ \varphi_{\tilde{x}}$.

c) Jeżeli $p : \tilde{X} \to X$ *jest G-nakryciem spójnym i* $\varphi_{\tilde{x}} : \pi_1(X, x_0) \to G$ *homomorfizmem wyznaczonym przez* $\tilde{x} \in \tilde{X}$, *to podgrupą wyznaczającą klasę izomorfizmu nakrycia p (zapominamy o działaniu G!) jest*

$$p_\sharp \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}) = \ker \varphi_{\tilde{x}} \trianglelefteq \pi_1(X, x_0).$$

Dowód. a) Wybór punktu $\tilde{x} \in p^{-1}(x_0)$ pozwala określić bijekcję $G \to p^{-1}(x_0)$ w której elementowi $g \in G$ przyporządkowany jest punkt $g(\tilde{x})$. Jej odwrotność oznaczymy symbolem $\nu_{\tilde{x}}$. Homomorfizm $\varphi_{\tilde{x}} : \pi_1(X, x_0) \to G$ definiujemy wzorem $\varphi_{\tilde{x}}([\omega]) = \nu_{\tilde{x}}(\tilde{\omega}(1))$ gdzie $\tilde{\omega}$ jest podniesieniem pętli ω o początku w punkcie $\tilde{x}$. Pozostaje sprawdzić, że istotnie jest to homomorfizm, co pozostawiamy czytelnikowi.

b) Niech $g \in G$ będzie takim elementem, że $g(\tilde{x}) = \tilde{x}'$. Wówczas $\nu_{\tilde{x}} = \nu_{\tilde{x}'} g$. Niech $\tilde{\omega}$ będzie podniesieniem pętli ω o początku w punkcie $\tilde{x}$. Wówczas $g\tilde{\omega}$ jest podniesieniem pętli ω o początku w punkcie $\tilde{x}'$. Mamy $\varphi_{\tilde{x}'}([\omega]) = \nu_{\tilde{x}'}(g\tilde{\omega}(1)) = g\nu_{\tilde{x}'}(\tilde{\omega}(1)) = g\nu_{\tilde{x}}(\tilde{\omega}(1))g^{-1} = g\varphi_{\tilde{x}}([\omega])g^{-1}$.

c) Z określenia homomorfizmu $\varphi_{\tilde{x}}$ jest jasne, że $\ker \varphi_{\tilde{x}} = p_\sharp(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}))$, co dowodzi tezy.

□

Twierdzenie 15. *Niech G będzie ustaloną grupą, a X ustaloną przestrzenią z wyróżnionym punktem $x_0 \in X$. Wówczas:*

a) Dla każdego homomorfizmu $\varphi : \pi_1(X, x_0) \to G$ istnieje G– nakrycie $p : \tilde{X} \to X$ i punkt wyróżniony $\tilde{x} \in \tilde{X}$, $\tilde{x} \in p^{-1}(x_0)$, dla którego $\varphi_{\tilde{x}} = \varphi$.

b) Jeżeli $p_1 : \tilde{X}_1 \to X$, $p_2 : \tilde{X}_2 \to X$ są G-nakryciami nad X z wyróżnionymi punktami $\tilde{x}_1 \in p_1^{-1}(x_0)$, $\tilde{x}_2 \in p_2^{-1}(x_0)$ i wyznaczone przez te punkty homomorfizmy $\varphi_{\tilde{x}_1}$ i $\varphi_{\tilde{x}_2}$ są równe, to istnieje G-izomorfizm nakryć $f : \tilde{X}_1 \to \tilde{X}_2$, dla którego $f(\tilde{x}_1) = \tilde{x}_2$.

Dowód. a) Jeżeli mamy dany homomorfizm $\varphi : \pi_1(X, x_0) \to G$, to definiuje on prawe działanie $\pi_1(X, x_0)$ na zbiorze G przez prawe przesunięcia. Niech $\tilde{X}_\pi \to X$ będzie nakryciem uniwersalnym. Definiujemy G-nakrycie $p_\phi : \tilde{X}_\phi \to X$ wzorem $\tilde{X}_\phi := G \times_\pi \tilde{X}_\pi$. Działanie grupy G na X_ϕ zadane jest wzorem $g[h, \tilde{x}] = [gh, \tilde{x}]$, a wyróżnionym punktem jest $\tilde{x} = [e, \tilde{x}_0]$. Sprawdzenie, że $\varphi_{\tilde{x}} = \varphi$ pozostawiamy czytelnikowi,

b) Z poprzedniego punktu wynika, że $p_{1\sharp}(\pi_1(\tilde{X}_1, \tilde{x}_1)) = p_{2\sharp}(\pi_2(\tilde{X}_2, \tilde{x}_2))$, co w świetle kryterium istnienia podniesienia oznacza, że istnieje dokładnie jeden morfizm nakryć $f : \tilde{X}_1 \to \tilde{X}_2$, dla którego $f(\tilde{x}_1) = \tilde{x}_2$. Z równości homomorfizmów $\varphi_{\tilde{x}_1} = \varphi_{\tilde{x}_2}$ wynika natomiast, że jest on przekształceniem ekwiwariantnym. □

Dla grupy G oznaczmy przez $\mathrm{Inn}(G)$ grupę automorfizmów wewnętrznych grupy G. Grupa ta działa na zbiorze $\mathrm{Hom}(H, G)$, dla dowolnej grupy H. Przez $\mathrm{Rep}(H, G)$ oznaczamy zbiór orbit $\mathrm{Hom}(H, G)/\mathrm{Inn}(G)$.

$$\mathrm{Rep}(H, G) = \mathrm{Hom}(H, G)/\mathrm{Inn}(G)$$

Dla grupy G i przestrzeni X przez $\mathrm{Cov}_G(X)$ oznaczamy zbiór klas G– izomorfizmu G–nakryć nad X.

Wniosek 19. *Niech G będzie grupą a (X, x_0) przestrzenią z wyróżnionym punktem. Istnieje naturalna bijekcja zbiorów*

$$\mathrm{Cov}_G(X) \to \mathrm{Rep}\,(\pi_1(X, x_0)\,,\, G).$$

Przykład 19. Wróćmy do przykładu 18. Niech $1 \in S^1$ będzie punktem wyróżnionym zarówno w przestrzeni nakrywanej jak i nakrywającej, Dla pierwszego działania grupy $\mathbb{Z}_3$ na S^1 homomorfizm $\pi_1(S^1, 1) = \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_3$ posyła generator grupy $\mathbb{Z}$ na element ρ, dla drugiego działania na element ρ^2. Dla obu działań homomorfizm nie zależy od wyboru punktu, bo grupa $\mathbb{Z}_3$ jest przemienna. Dla obu homomorfizmów jądro jest równe podgrupie $3\mathbb{Z}$, więc nakrycia są izomorficzne. Homomorfizmy te wszakże nie różnią się o automorfizm wewnętrzny ($\mathrm{Inn}(\mathbb{Z}_3) = 1$) więc rozpatrywane $\mathbb{Z}_3$ – nakrycia nie są $\mathbb{Z}_3$ – izomorficzne.

Przykład 20. Dla nakrycia trywialnego $X \times G \to X$ i dowolnego punktu $\tilde{x} \in X \times G$ wyznaczony przezeń homomorfizm jest trywialny.

6.3 Zadania

6.3.1. Wykazać, że nakrycie indukowane z G-nakrycia jest G-nakryciem.

6.3.2. Wykazać, że operację sklejania nakryć opisaną w rozdziale 7 można przenieść na G – nakrycia.

6.3.3. Niech $\psi : G \to H$ będzie homomorfizmem grup. Niech $\tilde{X} \to X$ będzie G– nakryciem. Pokazać, że $H \times_\psi \tilde{X} \to X$ jest H nakryciem.

Definicja. *Niech $\tilde{X}$ będzie przestrzenią spójną i lokalnie łukowo spójną. Nakrycie $p\colon \tilde{X} \longrightarrow X$ nazywa się abelowe wtedy i tylko wtedy, gdy jest ono G – nakryciem i G jest grupą abelową.*

6.3.4. Niech $\tilde{X}_{abel} \longrightarrow X$ oznacza nakrycie odpowiadające homomorfizmowi $\pi_1(X, x_0) \to \pi_1(X, x_0)_{abel} = \pi_1(X, x_0)/[\pi_1(X, x_0), \pi_1(X, x_0)]$. Pokazać, że jeżeli $p : Y \longrightarrow X$ jest G – nakryciem abelowym, to $Y = G \times_\psi \tilde{X}_{abel}$ dla pewnego homomorfizmu $\psi : G \to \pi_1(X, x_0)_{abel}$.

Pokazać, że jako nakrycie (bez rozpatrywania działania grupy G), $Y = \tilde{X}_{abel}/H$, gdzie $H \leq \pi_1(X, x_0)_{abel}$.

6.3.5. Opisać przestrzeń nakrycia i działanie grupy $\mathbb{Z}_6$ dla $\mathbb{Z}_6$ – nakrycia torusa wyznaczonego przez homomorfizm $h\colon \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$, $h(x, y) = (x(mod 2), y(mod 3))$.

6.3.6. Niech $p\colon E \longrightarrow B$ i $p'\colon E' \longrightarrow B$ będą G-nakryciami nad spójną i lokalnie łukowo spójną bazą. Zbadać, czy dowolne $f \in Cov(E, E')$ jest G – odwzorowaniem.

Rozdział 7

Twierdzenie Seiferta van Kampena

7.1 Grupy wolne

Wprowadzimy bardzo ważne w teorii grup pojęcie grupy wolnej generowanej przez ustalony zbiór.

Definicja. *Grupą wolną generowaną przez zbiór I nazywamy grupę $F(I)$ wraz z włożeniem $I \hookrightarrow F(I)$ takim, że dla dowolnej grupy G oraz odwzorowania zbiorów $f : I \to G$ istnieje dokładnie jeden homomorfizm $\bar{f} : F(I) \to G$ taki, że $\bar{f}|I = f$.*

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, hook] \arrow[d, "f"'] & F(I) \arrow[dl, "\bar{f}"] \\ G & \end{tikzcd}$$

Z powyższej definicji łatwo wynika, że grupa wolna o zadanym zbiorze generatorów jest wyznaczona jednoznacznie z dokładnością do izomorfizmu. Ponadto dowolne odwzorowanie zbiorów $f : I \to J$ wyznacza dokładnie jeden homomorfizm $\bar{f} : F(I) \to F(J)$, dla którego przemienny jest diagram:

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, hook] \arrow[d, "f"'] & F(I) \arrow[d, "\bar{f}"] \\ J \arrow[r, hook] & F(J) \end{tikzcd}$$

Podgrupę grupy $F(I)$ generowaną przez zbiór I oznaczamy symbolem $\langle I \rangle$ a jej elementy nazywamy słowami o literach z alfabetu I. Pokażemy, że z definicji wynika, iż zgodnie z nazwą grupa $F(I)$ jest generowana przez zbiór I.

Stwierdzenie 34. *Jeżeli $F(I)$ jest grupą wolną generowaną przez zbiór I, to $F(I) = \langle I \rangle$.*

Dowód. Z definicji grupy wolnej wynika, że istnieje dokładnie jeden homomorfizm $\bar{i} : F(I) \to \langle I \rangle$ będący identycznością na I. Złożenie $\bar{i}$ oraz inkluzji $\langle I \rangle \subseteq F(I)$ jest homomorfizmem $F(I) \to F(I)$ będącym identycznością na zbiorze I. Z drugiej strony identyczność $id_{F(I)} : F(I) \to F(I)$ też ma tę własność, skąd wynika, że $F(I) = \langle I \rangle$. $\square$

Przykład 21. Jeżeli $I = \{a\}$ jest zbiorem jednoelementowym, to grupa $F(\{a\})$ jest izomorficzna z grupą liczb całkowitych $\mathbb{Z}$.

Dowód istnienia grupy wolnej o większej liczbie generatorów nie jest już tak prosty, choć "kandydatura" jest dość oczywista. Rozpatrujemy zbiór wszystkich słów postaci ${x_1}^{\alpha_1}{x_2}^{\alpha_2}\dots{x_n}^{\alpha_1 n}$,

$\alpha_i \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, $n \in \mathbb{N}$ oraz słowo puste $\emptyset$. W zbiorze tym wprowadzamy oczywiste relacje równoważności, a działanie grupowe polega na dopisywaniu jednego słowa za drugim. Należy pracowicie sprawdzić, że działanie grupowe jest poprawnie określone i spełnia wszystkie aksjomaty grupy. My wykorzystamy do dowodu istnienia grupy wolnej rozważania topologiczne. Okazuje się, że prawdziwe jest następujące

Twierdzenie 16. *Jeżeli I jest dowolnym zbiorem, to*

$$F(I) \simeq \pi_1(\bigvee_{i \in I} S^1_i, 1)$$

gdzie $\forall_{i \in I} S^1_i = S^1$ a element $i \in I$ utożsamiamy z włożeniem $S^1 = S^1_i \subset \bigvee_{i \in I} S^1_i$.

Twierdzenie to udowodnimy w następnym rozdziale. W dalszym ciągu tego rozdziału zakładamy jego prawdziwość.

Uwaga-Zadanie: W teorii grup wprowadza się pojęcie wolnej grupy abelowej o zadanym zbiorze generatorów. Definicja jest analogiczna do powyższej - żądamy by każda funkcja określona na zbiorze generatorów o wartościach w dowolnej grupie abelowej miała jednoznaczne przedłużenie do homomorfizmu. Pokazać, że wolna grupa abelowa o skończonej liczbie generatorów jest izomorficzna ze skończonym produktem grupy liczb całkowitych. Jaka przestrzeń ma taką właśnie grupę podstawową?

Wniosek 20. *Każda grupa jest obrazem pewnej grupy wolnej.*

Dowód. Niech G będzie grupą a S jej dowolnym zbiorem generatorów. Z definicji grupy wolnej wynika, że istnieje (dokładnie jeden dla wybranego zbioru generatorów) homomorfizm $F(S) \to G$ będący przedłużeniem włożenia $S \subseteq G$. Obraz tego homomorfizmu zawiera S, więc jest on epimorfizmem. $\square$

Definicja. *Niech $G = \langle\, S \,\rangle$ i niech $N \trianglelefteq F(S)$ będzie jądrem epimorfizmu $F(S) \twoheadrightarrow G$. Będziemy mówili, że* **g***rupa G posiada prezentację $\langle\, S \mid W \,\rangle$, o zbiorze generatorów S i zbiorze relacji W, jeżeli $W \subseteq F(S)$ jest takim zbiorem słów zapisanych w alfabecie S, dla którego $N \trianglelefteq F(S)$ jest najmniejszą podgrupą normalną $F(S)$ zawierającą W (to znaczy $N = \langle \bigcup_{x \in F(S)} xWx^{-1} \rangle$).*

W tej konwencji $F(S) = \langle\, S \mid \emptyset \,\rangle$, ale także $F(S) = \langle\, S \mid 1 \,\rangle$. Oczywiście dana grupa może mieć bardzo wiele prezentacji. Na ogół jesteśmy zainteresowani w możliwie najoszczędniejszym wyborze zbiorów S i W. Rozstrzygnięcie, czy dwie prezentacje przedstawiają grupy izomorficzne jest niekiedy bardzo trudnym zadaniem.

Istnieje algorytm rozstrzygający powyższą kwestię, jeżeli wiadomo, że zbiór generatorów jest skończony i grupa jest przemienna. Algorytm istnieje także dla innych klas grup - co ciekawe definiowanych geometrycznie np. tzw. grup hiperbolicznych.

Przykład 22. 1) grupa cykliczna rzędu n, $\mathbb{Z}_n = \langle\, a \mid a^n \,\rangle$

2) grupa dihedralna rzędu $2n$, $D_{2n} = \langle\, \rho, \varepsilon \mid \rho^n, \varepsilon^2, \varepsilon\rho\varepsilon\rho \,\rangle$. Niekiedy stosujemy również taki zapis $D_{2n} = \langle\, \rho, \varepsilon \mid \rho^n = 1, \varepsilon^2 = 1, \varepsilon\rho\varepsilon = \rho^{-1} \,\rangle$

3) $F(S) =< S \sqcup T \mid T >$, gdzie $\sqcup$ oznacza sumę rozłączną zbiorów.

7.2 Sumy wolne z amalgamacją

Opiszemy konstrukcję ”sklejania” dwóch grup wzdłuż ich wspólnej podgrupy, a nawet ogólniej wzdłuż homomorfizmów z pewnej trzeciej grupy.

Definicja. *Załóżmy, że mamy dane dwa homomorfizmy grup o wspólnej dziedzinie:*

$$\begin{tikzcd} H \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "f_1"'] & G_2 \\ G_1 & \end{tikzcd}$$

Sumą wolną grup $\mathbf{G_1}$, $\mathbf{G_2}$ *z amalgamacją wzdłuż grupy* $\mathbf{H}$ *nazywa się grupę* G *wraz z homomorfizmami* $G_1 \xrightarrow{j_1} G \xleftarrow{j_2} G_2$ *takimi, że przemienny jest diagram:*

$$\begin{tikzcd} H \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "f_1"'] & G_2 \arrow[d, "j_2"] \\ G_1 \arrow[r, "j_1"] & G \end{tikzcd}$$

oraz dla dowolnego przemiennego diagramu homomorfizmów

$$\begin{tikzcd} H \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "f_1"'] & G_2 \arrow[d, "j_2"] \arrow[ddr, "h_2"] & \\ G_1 \arrow[r, "j_1"] \arrow[drr, "h_1"'] & G \arrow[dr, dashed, "h"] & \\ & & K \end{tikzcd}$$

istnieje dokładnie jeden homomorfizm $h : G \to K$ *taki, że* $h_1 = h \circ j_1$ *oraz* $h_2 = h \circ j_2$*. Sumę wolną grup* G_1, G_2 *z amalgamacją wzdłuż* H *oznaczamy symbolem* $G_1 *_H G_2$*. Jeżeli* H *jest grupą trywialną, to sumę wolną z amalgamacją wzdłuż podgrupy trywialnej po prostu nazywamy sumą wolną i oznaczamy symbolem* $G_1 * G_2$*.*

Zauważmy, że jeżeli suma wolna z amalgamacją istnieje to jest wyznaczona jednoznacznie z dokładnością do izomorfizmu. Nie rozstrzygając na razie, czy suma wolna z amalgamacją zawsze istnieje rozważmy przykłady, gdy w których łatwo wykazać jej istnienie.

Przykład 23. Suma wolna z amalgamacją diagramu

$$\begin{tikzcd} H \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "f_1"'] & \{1\} \\ G_1 & \end{tikzcd}$$

istnieje i jest izomorficzna z grupą G_1/K, gdzie $K = \langle \bigcup_{g \in G_1} g f_1(H) g^{-1} \rangle$ jest najmniejszą podgrupą normalną grupy G_1 zawierającą obraz $f_1(H)$. Homomorfizm j_1 jest rzutowaniem na grupę ilorazową $G_1 \to G_1/K$. W szczególności jeżeli grupa G_1 posiada prezentację $\langle\, S \mid W \,\rangle$ oznacza to, że jest ona sumą z amalgamacją następującego diagramu:

$$\begin{tikzcd} F(W) \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "f_1"'] & \{1\} \\ F(S) & \end{tikzcd}$$

Stwierdzenie 35. *W diagramie*

$$\begin{tikzcd} H \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "f_1"'] & G_2 \\ G_1 & \end{tikzcd}$$

niech $H = \langle\, T \,\rangle$, zaś grupy G_1, G_2 mają prezentacje $G_i = \langle\, S_i \mid W_i \,\rangle$. Wówczas suma wolna z amalgamacją istnieje i ma następującą prezentację:

$$G_1 *_H G_2 \;=\; \langle\, S_1 \sqcup S_2 \mid W_1 \cup W_2 \cup \{f_1(t)f_2(t)^{-1} \colon\; t \in T\} \,\rangle.$$

Homomorfizmy j_i dane są przez włożenia $S_i \subset S_1 \sqcup S_2$.

Dowód. Rozpatrzmy dowolny przemienny diagram homomorfizmów

$$\begin{tikzcd} \langle\, T \,\rangle \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "f_1"'] & \langle\, S_2 \mid W_2 \,\rangle \arrow[dd, "h_2"] \\ \langle\, S_1 \mid W_1 \,\rangle \arrow[dr, "h_1"'] & \\ & K \end{tikzcd}$$

Istnieje dokładnie jeden homomorfizm $h' : F(S_1 \sqcup S_2) \to K$, taki że $h'(s) = h_i(s)$, dla $s \in S_i$. Jeżeli $x \in W_i$, to oczywiście $x \in \ker h'$. Ponadto z przemienności diagramu, dla każdego $t \in T$, $h'(f_1(t)) = h'(f_2(t))$, a zatem h' wyznacza homomorfizm $h : \langle\, S_1 \sqcup S_2 \mid W_1 \cup W_2 \cup \{f_1(t)f_2(t)^{-1} \colon\; t \in T\} \,\rangle$ spełniający warunki definicji. Jego jedyność wynika z jedyności homomorfizmu h'. $\square$

Wniosek 21. *Suma wolna grup wolnych $F(S) * F(T)$ istnieje i jest izomorficzna z grupą wolną $F(S \sqcup T)$. Homomorfizmy j_1, j_2 są zdefiniowane przez włożenia $S \subset S \sqcup T$ oraz $T \subset S \sqcup T$.*

Wniosek 22. *Jeżeli w diagramie*

$$\begin{tikzcd} H \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "f_1"'] & G_2 \\ G_1 & \end{tikzcd}$$

homomorfizmy f_1 i f_2 są trywialne, to suma wolna z amalgamacją jest izomorficzna z sumą wolną $G_1 * G_2$.

Podobnie jak istnienie grupy wolnej tak istnienie sumy wolnej z amalgamacją wykażemy topologicznie w następnym rozdziale.. Upraszczając, pokażemy że "sklejaniu " przestrzeni wzdłuż podprzestrzeni odpowiada "sklejanie" grup podstawowywch wzdłuż grupy podstawowej części wspólnej.

7.3 Dowód twierdzenie Seiferta-van Kampena

Pojęcia wprowadzone w poprzednim rozdziale posłużą nam do sformułowania twierdzenia opisującego grupę podstawową przestrzeni będącej sumą podprzestrzeni $X = U \cup V$ w terminach grup podstawowych przestrzeni U, V, $U \cap V$.

Założenie: *Dla uproszczenia będziemy zakładać, że wszystkie rozważane przestrzenie są lokalnie łukowo spójne i posiadają nakrycie uniwersalne, to jest małe pętle są ściągalne.*

Twierdzenie 17. *Jeżeli U , $V \subset X$ są dwoma otwartymi podzbiorami przestrzeni X takimi, że $X = U \cup V$ oraz $U \cap V$ są zbiorami łukowo spójnymi, to dla dowolnego punktu $x_0 \in U \cap V$ w diagramie*

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(U \cap V, x_0) & \xrightarrow{i_V} & \pi_1(V, x_0) \\ \downarrow{\scriptstyle i_U} & & \downarrow{\scriptstyle j_V} \\ \pi_1(U, x_0) & \xrightarrow{j_U} & \pi_1(X, x_0) \end{array}$$

w którym wszystkie homomorfizmy są indukowane przez włożenia podzbiorów, grupa $\pi_1(X, x_0)$ jest sumą wolną grup $\pi_1(U, x_0)$ i $\pi_1(V, x_0)$ z amalgamacją wzdłuż $\pi_1(U \cap V, x_0)$.

Uwaga: Z założeń wynika, że U i V są także łukowo spójne. Przedstawimy dwa dowody tego twierdzenia – klasyczny i dowód Grothendiecka wykorzystujący G – nakrycia. Zaczynamy od dowodu klasycznego.

7.3.1 Dowód "klasyczny"

Dowód. Niech $h_1 : \pi_1(U, x_0) \to G$ oraz $h_2 : \pi_1(V, x_0) \to G$ będą homomorfizmami takimi, że $h_1 \circ i_U = h_2 \circ i_V$. Musimy wykazać istnienie i jednoznaczność homomorfizmu $h : \pi_1(X, x_0) \to G$. Dla każdego punktu $x \in X$ wybierzmy na użytek dowodu drogę γ_x o początku w punkcie x_0 i końcu w punkcie x. O wyborze tym zakładamy jedynie, że dla każdego punktu $x \in U$ droga γ_x jest zawarta w U i analogicznie dla punktów $U \cap V$ i V oraz, że γ_{x_0} jest droga stałą.

Niech $\omega : I \to X$ będzie drogą. Niech $n \in \mathbb{N}$ będzie taką liczba, że $\frac{1}{n}$ jest liczbą Lebsgue'a pokrycia $\omega^{-1}(U) \cap \omega^{-1}(V) = I$. Dla uproszczenia oznaczeń niech γ_k będzie droga jak wyżej o końcu w punkcie $\omega(\frac{k}{n})$, $k = 0, \ldots, n$. Zatem γ_0 i γ_n są drogami stałymi. Rozpatrzmy pętle $\omega_k = \gamma_{k-1} \star \omega_{|_{[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}]}} \star {\gamma_k}^{-1}$, $k = 1, \ldots, n$ i zauważmy, że $[\omega] = [\omega_1 \star \omega_2 \star \cdots \star \omega_n]$. Każda z pętli ω_k jest zawarta w U lub w V, więc odwzorowanie h możemy zdefiniować tylko w jeden sposób:

$$h([\omega]) = h_{\epsilon(1)}([\omega_1]) \cdot \cdots \cdot h_{\epsilon(n)}([\omega_n]),$$

gdzie $h_{\epsilon(i)}$ jest równe h_1 lub h_2 w zależności od tego, czy pętla leży w U, czy w V. Jeżeli pętla leży w $U \cap V$, to z równości $h_1 \circ i_U = h_2 \circ i_V$ homomorfizmy h_1 i h_2 przyjmują na niej tę sama wartość.

Jest jasne, że jeśli powyższa definicja jest poprawna, to h jest homomorfizmem i jest wyznaczone jednoznacznie. Pozostaje więc sprawdzić, że przekształcenie h jest dobrze określone - to znaczy nie zależy od podziału odcinka i klasy homotopii pętli. Jest oczywiste, że rozdrobnienie podziału odcinka prowadzi do tej samej wartości $h([\omega])$. Załóżmy więc, że $[\omega] = [\tau]$ i że H jest homotopią, $H_{|_{I \times 0}} = \omega$ i $H_{|_{I \times 1}} = \tau$. Niech $n \in N$ będzie takie, że przy podziale $I \times I$ obraz przy homotopii H każdego kwardacika o boku $\frac{1}{n}$ jest zawarty w U lub w V. Pokażemy, że dla każdego $0 \geq l \geq n-1$, $h([H(\cdot, \frac{l+1}{n})]) = h([H(\cdot, \frac{l}{n})])$, co implikuje tezę. Przyjmijmy wygodne oznaczenia: $\gamma_{k,l}$ będzie drogą o końcu w punkcie $H(\frac{k}{n}, \frac{l}{n})$, $k, l = 0, \ldots, n$. Drogi $\gamma_{0,l}$ i $\gamma_{n,l}$ są więc stałe. Dla $k, l = 0, \ldots, n$ rozważmy pętle

$$\omega_{k,l} = \gamma_{k-1,l} \star H_{|_{[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}] \times \frac{l}{n}}} \star {\gamma_{k,l}}^{-1},$$

$$\sigma_{k,l} = \gamma_{k,l-1} \star H|_{\frac{k}{n}\times[\frac{l-1}{n},\frac{l}{n}]} \star \gamma_{k,l}{}^{-1}.$$

Drogi po bokach kwadratu są homotopijne względem końców (Zadanie 4.4) i wynika z tego, że $[\omega_{k,l} \star \sigma_{k,l}] = [\sigma_{k-1,l} \star \omega_{k,l+1}]$, czyli

$$[\omega_{k,l}] = [\sigma_{k-1,l} \star \omega_{k,l+1} \star \sigma_{k,l}^{-1}]$$

Mamy

$$[H(\cdot, \frac{l}{n})] = [\omega_{1,l}] \star [\omega_{2,l}] \star \dots \star [\omega_{n,l}]$$

Z definicji przekształcenia h:

$$\begin{aligned} h([H(\cdot, \frac{l}{n})]) =& h_{\epsilon(1,l)}([\omega_{1,l}]) \cdot h_{\epsilon(2,l)}([\omega_{2,l}]) \dots h_{\epsilon(1,l)}([\omega_{n,l}]) = \\ =& h_{\epsilon(1,l)}([\omega_{1,l+1}] \star \sigma_{1,l}^{-1}) \cdot h_{\epsilon(2,l)}([\sigma_{1,l} \star \omega_{2,l+1} \star \sigma_{2,l}^{-1}]) \dots h_{\epsilon(n,l)}([\sigma_{n-1,l} \star \omega_{n,l+1}]), \end{aligned}$$

gdzie $h_{\epsilon(k,l)}$ jest równe h_1 lub h_2 w zależności od tego, czy rozpatrywana pętla leży w U czy w V, co ma sens, bo dla dowolnych k, l, pętle $\omega_{k,l}$ i $\sigma_{k-1,l} \star \omega_{k,l+1} \star \sigma_{k,l}^{-1}$ leżą w jednym z tych zbiorów. Ponieważ h_1 i h_2 są homomorfizmami, $h_{\epsilon(k,l)} = h_{\epsilon(k+1,l)} = h_{\epsilon(k,l+1)}$, to $h_{\epsilon(k,l)}([\sigma_{k,l}^{-1}]) \cdot h_{\epsilon(k+1,l)}([\sigma_{k,l}]) = 1$ i z powyższej równości dostajemy

$$\begin{aligned} h([H(\cdot, \frac{l}{n})]) =& h_{\epsilon(1,l)}([\omega_{1,l+1}]) \cdot h_{\epsilon(2,l)}([\omega_{2,l+1}]) \dots h_{\epsilon(1,l)}([\omega_{n,l+1}] \\ =& h([H(\cdot, \frac{l+1}{n})]). \end{aligned}$$

Kończy to dowód twierdzenia Seiferta van Kampena. □

7.3.2 Dowód Alexandre Grothendiecka

Zanim przystąpimy do dowodu, zauważmy, że konstrukcję sklejania nakryć możemy rozszerzyć na G – nakrycia.

Sklejanie G – nakryć. Niech $X = U_1 \cup U_2$ będzie sumą podzbiorów otwartych i niech nad każdym z nich będzie dane G – nakrycie $p_i : \tilde{U}_i \to U_i$, $i = 1, 2$, zaś nad ich częścią wspólną $U_1 \cap U_2$ niech będzie zadany G – izomorfizm obcięć tych nakryć $h : p_1^{-1}(U_1 \cap U_2) \to p_2^{-1}(U_1 \cap U_2)$. Wtedy przekształcenie $p : \tilde{X}_1 \cup_h \tilde{X}_2 \to X$ dane wzorem $p([\tilde{x}_i]) = p_i(\tilde{x}_i)$ dla $\tilde{x}_i \in \tilde{U}_i$ jest G – nakryciem. Dowód pozostawiamy czytelnikowi.

Przypominamy, że założyliśmy, że w rozpatrywanych przestrzeniach małe pętle są ściągalne i do przeprowadzenia dowodu Alexandre Grothediecka będziemy z tego korzystać.

Dowód. Niech G będzie dowolną grupą i niech $h_1 : \pi_1(U, x_0) \to G$ oraz $h_2 : \pi_1(V, x_0) \to G$ będą homomorfizmami takimi, że $h_1 \circ i_U = h_2 \circ i_V$. Na mocy twierdzenia 15 homomorfizm h_1 wyznacza punktowane G-nakrycie $p_1 : \tilde{U} \to U$, $\tilde{x}_U \in p_1^{-1}(x_0)$ a homomorfizm h_2 wyznacza punktowane G-nakrycie $p_2 : \tilde{V} \to V$, $\tilde{x}_V \in p_2^{-1}(x_0)$. Ponieważ $h_1 \circ i_U = h_2 \circ i_V$, to nad $U \cap V$ istnieje (dokładnie jeden) G–izomorfizm nakryć: $f : \tilde{U}_{|U\cap V} \to \tilde{V}_{|U\cap V}$, $f(\tilde{x}_U) = \tilde{x}_V$. Sklejając nakrycia p_1 i p_2 wzdłuż f definiujemy G–nakrycie $\tilde{X} := \tilde{U} \coprod \tilde{V}/\tilde{u} \sim f(\tilde{u}) \to X$ z punktem wyróżnionym $\tilde{x} = [\tilde{x}_U]$, co wyznacza homomorfizm $h : \pi_1(X, x_0) \to G$. Z konstrukcji nakrycia $\tilde{X}$ wynika, ze $h \circ j_U = h_1$ i $h \circ j_V = h_2$.

Pozostaje wykazanie jedyności homomorfizmu h. Niech $h' : \pi_1(X, x_0) \to G$ będzie homomorfizmem dla którego $h' \circ j_U = h_1$ i $h' \circ j_V = h_2$. Niech $p' : \tilde{X}' \to X$ będzie G – nakryciem z wyróżnionym punktem $\tilde{x}' \in p'^{-1}(x_0)$, które wyznacza homomorfizm h'. Z twierdzenia 14 wynika, że dla dowodu równości $h = h'$ musimy pokazać, że istnieje G– izomorfizm nakryć $k : \tilde{X} \to \tilde{X}'$, $k(\tilde{x}) = \tilde{x}'$. Z równości $h' \circ j_U = h_1$ i $h' \circ j_V = h_2$ wynika, że istnieją G – izomorfizmy $k_1 : \tilde{U} \to \tilde{X}'_{|U}$, $k_1(\tilde{x}_U) = \tilde{x}'$ i $k_2 : \tilde{V} \to \tilde{X}'_{|V}$, $k_2(\tilde{x}_V) = \tilde{x}'$. Wystarczy sprawdzić, że G– izomorfizmy k_1 i k_2 można skleić do G– izomorfizmu $\tilde{X} \to \tilde{X}'$. Oczywiście $k_{2|_{U\cap V}} \circ f$ i $k_{1|_{U\cap V}}$ są G– izomorfizmami $\tilde{U}_{|_{U\cap V}} \to \tilde{X}'_{|_{U\cap V}}$ przeprowadzającymi punkt $\tilde{x}_U$ na punkt $\tilde{x}'$. Taki izomorfizm jest tylko jeden, więc $k_{2|_{U\cap V}} \circ f = k_{1|_{U\cap V}}$ i dobrze zdefiniowany jest G - izomorfizm $k : \tilde{X} \to \tilde{X}'$. □

Wniosek 23. *Jeżeli (X, x_0) i (Y, y_0) są przestrzeniami z wyróżnionymi punktami, takimi, że oba są retraktami deformacyjnymi swoich pewnych otoczeń otwartych. Wówczas włożenia w bukiet $(X \vee Y, (x_0, y_0))$ definiują izomorfizm*

$$\pi_1(X, x_0) * \pi_1(Y, y_0) \simeq \pi_1(X \vee Y, (x_0, y_0)).$$

Przedstawimy teraz kilka wniosków, które powinny przekonać Czytelnika o wielkiej wadze twierdzenia Seiferta-van Kampena w algebrze i w topologii.

Dowód. **Twierdzenia 16** Z wniosku 23 wynika przez indukcję, że

$$\pi_1(S^1 \vee ... \vee S^1, [1]) \simeq \mathbb{Z} \star ... \star \mathbb{Z}.$$

jest grupą wolną o n-generatorach. Ponieważ $F(1) \simeq \mathbb{Z}$, więc z wniosku 21 wynika, że $F(n) \cong F(1) \star ... \star F(1)$. Pokażemy teraz, że jeżeli I jest dowolnym zbiorem oraz dla każdego $i \in I$, $S^1_i = S^1$ z wyróżnionym punktem $1 \in S^1$, to

$$F(I) \simeq \pi_1(\bigvee_{i\in I} S^1_i, [1]).$$

Zdefiniujemy włożenie $I \hookrightarrow \pi_1(\bigvee_{i\in I} S^1_i, [1])$ – elementowi $i \in I$ przyporządkowujemy $j_{i\sharp}(id_{S^1_i})$. Czytelnikowi pozostawiamy sprawdzenie, że istotnie jest to włożenie. Niech teraz $f : I \to G$ będzie dowolnym odwzorowaniem w grupę G. Musimy wykazać istnienie i jednoznaczność homomorfizmu $\bar{f} : \pi_1(\bigvee_{i\in I} S^1_i, [1]) \to G$ będącego przedłużeniem f. Niech $\omega : I \to \bigvee_{i\in I} S^1_i$ będzie pętlą zaczepioną w punkcie [1]. Ze zwartości odcinka wynika, że obraz $\omega(I)$ jest zawarty w pewnym skończonym bukiecie $\bigvee_{i\in I_\omega} S^1_i$. Z wniosku 23 wiemy, że $\pi_1(\bigvee_{i\in I_\omega} S^1_i, [1]) = F(I_\omega)$, a więc że istnieje $\bar{f}_{|_{I_\omega}} : \pi_1(\bigvee_{i\in I_\omega} S^1_i, [1]) \to G$ będący przedłużeniem $f_{|_{I_\omega}}$. Definiujemy

$$\bar{f}([\omega]) = \bar{f}_{|_{I_\omega}}(p_{\omega\sharp}([\omega])),$$

gdzie p_ω jest rzutowaniem na bukiet $\bigvee_{i\in I_\omega} S^1_i$, to znaczy wszystkie sfery S^1_i dla $i \notin I_\omega$ przekształca w punkt bukietowy, a na sferach S^1_i dla $i \in I_\omega$ jest identycznością. Sprawdzenie, że powyższa formuła definiuje jedyny homomorfizm pozostawiamy czytelnikowi. □

Następny wniosek pozwoli nam wykazać, że dla dowolnej grupy G istnieje przestrzeń X taka, że $\pi_1(X, x_0) \simeq G$.

Wniosek 24. *Niech $\{f_i : (S^1, 1) \to (X, x_0)\}_{i\in I}$ będzie rodziną przekształceń z okręgu w przestrzeń łukowo spójną X a $Y_f = \bigvee_{i\in I} D^2 \cup_f X$ przestrzenią powstałą przez doklejenie do X dysków 2-wymiarowych przy pomocy odwzorowania $f = \bigvee_{i\in I} f_i : \bigvee_{i\in I} S^1_i \to X$. Wtedy włożenie $X \subset Y_f$ indukuje epimorfizm na grupie podstawowej $\pi_1(X, x_0) \twoheadrightarrow \pi_1(Y_f, x_0)$ którego jądrem jest najmniejsza podgrupa normalna zawierająca elementy $[f_i] \in \pi_1(X, x_0)$, $i \in I$.*

Dowód. Z twierdzeniea Seiferta - van Kampena dla przestrzeni Y_f wynika, że grupa $\pi_1(Y_f, x_0)$ jest sumą z amalgamacją diagramu:

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(\bigvee_{i\in I} S^1_i, [1]) = F(I) & \longrightarrow & \pi_1(\bigvee_{i\in I} D^2_i, [1]) = \{1\} \\ \Big\downarrow{\scriptstyle f} & & \\ \pi_1(X, x_0) & & \end{array}.$$

Z przykładu 23 wynika już teza. Aby zastosowac twierdzenie Seiferta-van Kampena należy rozpatrzeć obrazy w przestrzeni ilorazowej Y_f następujacych zbiorów otwartych: $U = \coprod_{i\in I} int(D_i^2)$, $V = X \sqcup \coprod_{i\in I} V_i$, gdzie $V_i = \{z \in D_i^2 : |z| > 1/2\}$. □

Wniosek 25. *Dla każdej grupy G istnieje przestrzeń łukowo spójna X, taka że $\pi_1(X, x_0) = G$*

Dowód. Konstrukcja takiej przestrzeni wychodzi od prezentacji grupy $G =< I|R >$. Niech $X = \bigvee_{i\in I} S_i^1$. Dla każdego elementu $r \in R$ niech $r : (S^1, 1) \to (\bigvee_{i\in I} S_i^1, [1])$ będzie wyznaczającym go przekształceniem. Dostajemy przekształcenie $R : \bigvee_{r\in R} S_r^1 \to \bigvee_{i\in I} S_i^1$. Z poprzedniego twierdzenia wynika, że szukaną przestrzenią jest $Y = \bigvee_{r\in R} D_r^2 \cup_R \bigvee_{i\in I} S_i^1$. □

Pokażemy jeszcze, że dowolny homomorfizm grup możemy zrealizować jako homomorfizm indukowany na grupach podstawowych przez przekształcenie przestrzeni topologicznych.

Stwierdzenie 36. *Niech $\varphi : G \to H$ homomorfizm grup. Istnieją przestrzenie (Y, y_0) i (X, x_0) oraz przekształcenie $f : (Y, y_0) \to (X, x_0)$, takie że $\pi_1(Y, y_0) = G$, $\pi_1(X, x_0) = H$ i $f_\sharp = \varphi$.*

Dowód. Niech $G =< I|R >$ będzie prezentacja grupy G. Niech Y będzie przestrzenią skonstruowaną dla tej prezentacji w dowodzie poprzedniego wniosku. Niech X będzie dowolną przestrzenią łukowo spójną, taką że $\pi_1(X, x_0) = H$. Niech $f_i : (S^1, 1) \to (X, x_0)$ będzie pętlą reprezentującą $\varphi(i)$. Definiujemy $f = \bigvee_{i\in I} f_i : (\bigvee_{i\in I} S_i^1, [1]) \to (X, x_0)$. Przekształcenie to można rozszerzyć na przestrzeń Y, gdyż dla każdego $r \in R$, $\varphi(r) = 1$. otrzymane rozszerzenie spełnia warunki stwierdzenia. □

Na koniec podamy topologiczny dowód istnienia sumy z amalgamacją dla dowolnego diagramu grup

$$\begin{tikzcd} H \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "f_1"'] & G_2 \\ G_1 & \end{tikzcd}$$

Niech (A, a_0), (X, x_0), (Y, y_0) będą przestrzeniami a $f_1 : (A, a_0) \to (X, x_0)$, $f_2 : (A, a_0) \to (Y, y_0)$ takimi, że ich grupy podstawowe są równe H, G_1, G_2 odpowiednio a $f_{i\sharp} = \varphi_i$ dla $i = 1, 2$. Musimy jeszcze zadbać o to by można było zastosowac twierdzenie Seiferta- van Kampena. Możemy założyć, że przestrzenie są "dobrze punktowane", to znaczy że włożenie punktów wyróżnionych jest korozwłóknieniem. Rozpatrzmy przestrzeń $A \times I$ i przekształcenie $f : A \times \{0\} \cup A \times \{1\} \to X \sqcup Y$, które jest równe f_1 na $A \times \{0\}$ i f_2 na $A \times \{1\}$. Niech $Z = A \times I \cup_f X \sqcup Y$ i do tej przestrzeni stosujemy twierdzenie Seiferta van Kampena.

7.4 Zadania

7.4.1. Udowodnić bezpośrednio z definicji, że jeżeli $X = U \cup V$ jest suma dwóch jednospójnych podzbiorów otwartych oraz $U \cap V$ jest łukowo spójna, to przestrzeń X jest jednospójna. Wywnioskować stąd jednospójność sfer S^n dla $n > 2$. Podać inne dowody tego faktu.

7.4.2. Niech $x_0 \in A \subset U \subset X$ będą podzbiorami takimi, że U jest podzbiorem otwartym a włożenie $A \subset U$ jest homotopijną równoważnością. Niech $f : A \to Y$, $f(x_0) = y_0$. Wywnioskować z twierdzenia van Kampena, że $\pi_1(X \cup_f Y, y_0)$ jest produktem z amalgamacją diagramu:

$$\begin{tikzcd} \pi_1(A, x_0) \arrow[r, "f_\sharp"] \arrow[d] & \pi_1(Y, y_0) . \\ \pi_1(X, x_0) & \end{tikzcd}$$

Wywnioskować stąd, że jeżeli $\alpha\colon (S^1, *) \longrightarrow (X, x_0)$, X łukowo spójna i $Y = X \cup_f D^2$, to $\pi_1(Y, x_0) = \pi_1(X, x_0)/H$, gdzie H jest najmniejszą podgrupą normalną zawierającą $[\alpha]$.

7.4.3. Niech $X = D^2/\sim$, gdzie $x \sim y$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x, y \in S^1$ oraz x/y jest pierwiastkiem stopnia trzeciego z 1. Przedstawić $X = S^1 \cup_f D^2$ i zastosować poprzednie zadanie do znalezienia $\pi_1(X, *)$.

7.4.4. Dla dowolnej grupy G skonstruować przestrzeń spójną, dla której $\pi_1(X, x) = G$.
* Skonstruować zwartą rozmaitość 3-wymiarową, której grupa podstawowa jest grupą wolną o k generatorach.

Wskazówka: Przedstawić $G = F/R$, gdzie F jest grupą wolną. Skonstruować nakrycie nad bukietem okręgów odpowiadające R i skorzystać z poprzedniego zadania.

7.4.5. Niech $X = T\#T$ będzie dwupreclem, (tj przestrzenią która powstaje z sumy rozłącznej dwu torusów przez usunięcie dwóch małych dysków w każdym z nich i utożsamieniu punktów z S^1).

a) Znaleźć grupę podstawową X.

b) Pokazać, że nakrycie uniwersalne dwuprecla jest ściągalne. Wywnioskować, że każde odwzorowanie S^n, $n > 1$ w ten dwuprecel jest ściągalne.

Wskazówka: Rozpatrzeć nakrycie dwuprecla, takie by przestrzeń nakrywająca była homotopijnie równoważna z bukietem okręgów.

7.4.6. Niech $X = D^2 \times S^1 \cup_f S^1 \times D^2$, gdzie $f\colon S^1 \times S^1 \longrightarrow S^1 \times S^1$ jest dane przez liniowe przekształcenie $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ o macierzy całkowitoliczbowej $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Wyrazić $\pi_1(X, *)$ w terminach współczynników a, b, c, d.

7.4.7. Niech $A = \{z \in \mathbb{C}\colon\ \frac{1}{2} \leq |z| \leq 1\}$, niech $X = A/\sim$, gdzie $z \sim z'$ wtedy i tylko wtedy gdy $|z| = |z'| = 1$ i $z = -z'$ lub $|z| = |z'| = \frac{1}{2}$ i $(\frac{z}{z'})^3 = 1$. Znaleźć $\pi_1(X, *)$.

Definicja. *Węzłem w $K \subset \mathbb{R}^3$ ($K \subset S^3$) nazywamy podzbiór R^3 (S^3) homeomorficzny z okręgiem S^1.*

7.4.8. Jeżeli $K \subset \mathbb{R}^3$ jest węzłem, zaś $\mathbb{R}^3 = S^3 \setminus \{x_0\}$ (przez rzut stereograficzny), to $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K, *) \simeq \pi_1(S^3 \setminus K, *)$.

Definicja. *Niech $T = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ będzie torusem. Niech dla pary liczb naturalnych względnie pierwszych p, q, $K_{p,q} \subset T$ będzie obrazem prostej w $\mathbb{R}^2$ o równaniu $px = qy$. Przyporządkowując punktowi $(x, y) \in T$ punkt $(\frac{1}{\sqrt{2}}e^{2\pi ix}, \frac{1}{\sqrt{2}}e^{2\pi iy}) \in S^3$ możemy uważać, że $T \subset S^3$. Węzłem torusowym typu p, q nazywamy $K_{p,q} \subset T \subset S^3$.*

7.4.9. Narysować $K_{2,3}$ i $K_{3,2}$.

7.4.10. Pokazać, że $S^3 \setminus K_{2,3}$ jest homotopijnie równoważne przestrzeni wielomianów stopnia 3 bez pierwiastków wielokrotnych (z topologią podprzestrzeni $\mathbb{R}^4$). Skonstruować tę homotopię.

7.4.11. Niech $K = V \cap S^3$, gdzie $V = \{(z,w) \colon 4z^3 + 27w^2 = 0\} \subset \mathbb{C}^2$. Pokazać, że K jest węzłem oraz, że istnieje homeomorfizm $f \colon S^3 \longrightarrow S^3$, taki że $f(K) = K_{2,3}$.

Uogólnić powyższy przykład pokazując, że dla liczb naturalnych względnie pierwszych węzeł torusowy $K_{p,q} \subset S^3$ jest równy $\{(z,w) \in \mathbb{C}^2 \colon\ z^q = w^p\} \cap S^3$.

7.4.12. Niech $S^3 \subset \mathbb{C}^2$. Niech $A = \{(z,w) \in S^3 \colon |z| \leq |w|\}$, $B = \{(z,w) \in S^3 \colon |z| \geq |w|\}$. Pokazać, że $A \cong B \cong D^2 \times S^1$ są pełnymi torusami oraz $A \cap B = T = \{(z,w) \in S^3 \colon |z| = |w| = \frac{1}{\sqrt{2}}\}$ jest torusem.

Niech $K_{p,q}$ będzie węzłem torusowym typu (p,q) na torusie T. Pokazać, że $\pi_1(S^3 \setminus K_{p,q}) = \{a, b |\ a^p b^q = 1\}$. Pokazać, że $\pi_1(S^3 \setminus K_{p,q})_{ab} = \mathbb{Z}$.

7.4.13. Niech $\pi_n(X, x_0) = [(S^n, 1), (X, x_0)]_*$. Pokazać, że jeżeli $p : \tilde{X} \to X$ jest nakryciem, $p(\tilde{x}_0) = x_0$, to $p_\sharp : \pi_n(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to \pi_n(X, x_0)$ jest izomorfizmem.

Rozdział 8

Rozcinanie płaszczyzny - twierdzenie Jordana

Przedstawione tu podejście do twierdzenia Jordana podąża za Rozdz. XII klasycznego podręcznika K. Kuratowskiego *Wstęp do teorii mnogości i topologii.*

Definicja. *Powiemy, że podzbiór* $A \subset X$ *rozcina przestrzeń* X *między punktami* $p, q \in X$ *jeżeli* p *i* q *należą do dwóch różnych składowych spójnych zbioru* $X \setminus A$.

Stwierdzenie 37. *Jeżeli* $A \subset X$ *jest podzbiorem domkniętym rozcinającym* X *między punktami* p *i* q *to istnieją zbiory domknięte* $R \ni p$ *oraz* $Q \ni q$ *takie, że* $R \cup Q = X$ *oraz* $R \cap Q = A$.

W dalszym ciągu będziemy zajmować się rozcinaniem 2-wymiarowej sfery S^2. Sferę będziemy traktować jako płaszczyznę zespoloną $\mathbb{C}$ uzupełnioną o punkt w nieskończoności ∞. Ten model sfery nazywa się sferą Riemanna i będzie oznaczany $\bar{\mathbb{C}}$. Homeomorfizm między jednopunktowym uzwarceniem $\mathbb{C}$ a sferą S^2 jest dany przez rzut stereograficzny.

Twierdzenie 18. *Niech* $A \subset \mathbb{C}^*$ *będzie podzbiorem zwartym lub otwartym. Zbiór* A *nie rozcina sfery Riemanna* $\bar{\mathbb{C}}$ *między* 0 *a* ∞ *wtedy i tylko wtedy gdy istnieje gałąź logarytmu na* A *tzn. włożenie* $i : A \subset \mathbb{C}^*$ *posiada podniesienie do nakrycia* $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$.

Dowód. Zaczniemy od przypadku, gdy A jest podzbiorem zwartym.

Jeżeli A nie rozcina $\bar{\mathbb{C}}$ między 0 a ∞ to istnieje łamana $\subset \bar{\mathbb{C}}$ łącząca 0 z ∞ taka, że $A \subset \mathbb{C}^* \setminus$. Z lematu/zadania ?? wynika, że istnieje gałąź logarytmu na $\mathbb{C}^* \setminus$ a więc po obcięciu także na A. Odwrotnie, załóżmy że A rozcina $\bar{\mathbb{C}}$ miedzy 0 a ∞ oraz istnieje gałąź logarytmu na A. Wykażemy, że prowadzi to do sprzeczności. Skonstruujemy odwzorowanie $f : \mathbb{C}^* \cup \{\infty\} \to \mathbb{C}^*$ takie, że $f|\mathbb{C}^* \sim id$, co prowadzi do sprzeczności, bowiem $\mathbb{C}^* \cup \{\infty\} \approx \mathbb{R}^2$ a więc jest zbiorem ściągalnym, natomiast $id : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$ nie jest homotopijne z odwzorowaniem stałym.

Na mocy stw. 14.2 istnieją podzbiory domknięte $R \ni 0$ oraz $Q \ni \infty$ takie, że $R \cup Q = \bar{\mathbb{C}}$ oraz $R \cap Q = A$. Odwzorowanie f zdefiniujemy osobno na zbiorach R i Q w sposób zgodny na ich przecięciu, czyli A. Niech $\tilde{i} : A \to \mathbb{C}$ będzie gałęzią logarytmu na A. Z twierdzenia Tietze odwzorowanie $\tilde{i}$ można rozszerzyć do pewnego odwzorowania ciągłego $\tilde{f} : Q \to \mathbb{C}$. Dla $z \in Q$ kładziemy $f(z) := \exp(\tilde{f}(z))$, natomiast dla $z \in R$, $z \neq 0$ kładziemy $f(z) := z$. Z definicji logarytmu wynika, że te odwzorowania pokrywają się na A a więc definiują odwzorowanie $f : \mathbb{C}^* \cup \{\infty\} \to \mathbb{C}^*$ Ponieważ $0 \in \mathrm{Int}(R)$ a więc istnieje mały okrąg S^1_r o środku w 0 taki, że $f|S^1_r = id$ skąd wynika, że $f|\mathbb{C}^* \sim id$. Załóżmy teraz, że A jest podzbiorem otwartym i sprowdzimy ten przypadek do poprzednio rozważanego. Zbiór A można wypełnić wstępującym ciągiem podzbiorów zwartych $F_1 \subset F_2 \subset ... \subset A$. Wykażemy, że A rozcina między 0 a ∞ wtedy i tylko wtedy gdy wszystkie dostatecznie duże zbiory F_i rozcinają. Niech $\bar{\mathbb{C}} \setminus A = B_0 \cup B_\infty$ gdzie $B_0 \cup$ i B_∞ są rozłącznymi podzbiorami domkniętymi w $\bar{\mathbb{C}}$, a więc zwartymi. Wynika stąd, że istnieją rozłączne zbiory otwarte $U_0 \supset B_0$ oraz $U_\infty \supset B_\infty$. Zbiór $\bar{\mathbb{C}} \setminus (U_0 \cup U_\infty)$ jest zwarty, zawarty w A i oczywiście rozcina $\bar{\mathbb{C}}$ między 0 a ∞. Sprawdzenie, że jeżeli na każdym ze zbiorów F_i istnieje gałąż logarytmu, to istnieje ona także na A pozostawiamy Czytelnikowi. □

Wniosek 26. *Dowolny domknięty lub otwarty zbiór jednospójny $A \subset \mathbb{C}^*$ nie rozcina $\bar{\mathbb{C}}$ między 0 a ∞.*

Dowód. Z twierdzenia ... wynika, że na A istnieje gałąż logarytmu. □

Wniosek 27. *Niech $A, B \subset \bar{\mathbb{C}}$ są podzbiorami otwartymi lub domkniętymi.*

a) jeżeli A i B nie rozcinają $\bar{\mathbb{C}}$ między $p, q \in \bar{\mathbb{C}}$ oraz przecięcie $A \cap B$ jest spójne, to suma $A \cup B$ też nie rozcina $\bar{\mathbb{C}}$ między p i q.

b) jeżeli A i B są spójne, natomiast $A \cap B$ jest niespójne, to $A \cup B$ rozcina między pewną parą punktów.

Dowód. Ad a) Stosując homeomorfizm $h(z) = z - p/z - q$ można założyć, że $p = 0$ a $q = \infty$ i skorzystać z twierdzenia 14.3. Włożenia $i_A : A \subset \bar{\mathbb{C}}$ oraz $i_B : B \subset \bar{\mathbb{C}}$ posiadają podniesienia $\tilde{i}_A : A \to \mathbb{C}$ oraz $\tilde{i}_B : B \to \mathbb{C}$ Z jednoznaczności podniesienia na zbiorze spójnym wynika, że dla $z \in A \cap B$ mamy $\tilde{i}_A(z) = \tilde{i}_B(z) + 2\pi i k$, stąd otrzymujemy podniesienie nad $A \cup B$. *Ad b)*

Oznaczmy $A' := \bar{\mathbb{C}} \setminus A$ oraz $B' := \bar{\mathbb{C}} \setminus B$ i załóżmy przeciwnie, że zbiór $\bar{\mathbb{C}} \setminus (A \cup B) = A' \cap B'$ jest spójny. Niech $p, q \in A \cap B$ będą dowolnymi punktami. Ponieważ zbiory A, B są spójne więc A' i B' nie rozcinają miedzy p, q Ponieważ $A' \cap B'$ jest spójne więc na mocy punktu 1. $A' \cap B'$ też nie rozcina między p, q, co jest sprzeczne z założeniem, że $A \cup B = \bar{\mathbb{C}} \setminus (A' \cap B')$ nie jest spójne. □

Twierdzenie 19. *Niech $f : S^1 \to \bar{\mathbb{C}}$ będzie odwzorowaniem różnowartościowym. Jego obraz $K := f(S^1)$ rozcina $\tilde{\mathbb{C}}$ między pewną parą punktów, co więcej $\bar{\mathbb{C}} \setminus K = U \cup V$ gdzie U, V są rozłącznymi spójnymi zbiorami otwartymi oraz $\partial U = \partial V = K$.*

Dowód. Skorzystamy z dotychczasowego dorobku. Rozbijmy okrąg na sumę dwóch łuków $S^1 = S^1_+ \cup S^1_-$ takich, że $S^1_+ \cap S^1_- = \{-1, 1\}$ i oznaczmy odpowiednio ich obrazy przez K_+ i K_-. Ponieważ $K_+ \cap K_-$ jest zbiorem dwupunktowym więc z Wniosku 14.4.2 wynika, że zbiór K rozcina $\bar{\mathbb{C}}$ między pewnymi punktami.

Niech $\bar{\mathbb{C}} \setminus K = U_1 \cup U_2 \cup U_3 \cup ...$ gdzie U_i są rozłącznymi, niepustymi spójnymi zbiorami otwartymi. Pozostaje wykazać, że ciąg zbiorów U_i składa się tylko z dwóch wyrazów, oraz że $\partial U_1 = K = \partial U_2$.

Na początek zauważmy, że niezależnie od tego ile jest zbiorów U_i, to dla każdego $\partial U_i = K$. Istotnie z definicji brzegu wynika, że $\partial U_i \subset K$. Gdyby inkluzja była właściwa, to zbiór ∂U_i byłby zwarty w zbiorze homeomorficznym z odcinkiem, a więc na mocy Wn.14.4 nie rozcinałby, co prowadzi do sprzeczności bo ∂U_i oczywiście rozcina sferę. Mamy zatem dla każdego i równość $\partial U_i = K$. Pokażemy teraz, że w ciągu U_i występują dokładnie dwa zbiory. Załóżmy przeciwnie, tzn. że mamy co najmniej trzy (niepuste) zbiory U_1, U_2, U_3 oraz, że zbiór U_3 jest ograniczony (nie zawiera ∞). Wybierzmy dowolny punkt $p_3 \in U_3$ oraz rozpatrzmy dowolną prostą przechodzącą przez ten punkt. Można na niej wybrać punkty a, b takie, że $p_3 \in [a, b]$ oraz $[a, b] \cap K = \{a, b\}$. Punkty $a, b \in K$ dzielą K na dwa łuki K_+ i K_- o wspólnych końcach. Rozpatrzmy zbiór $K \cup [a, b]$. Wybierzmy punkty $p_1 \in U_1$ oraz $p_2 \in U_2$. Zbiór K, a więc tym bardziej $K \cup [a, b]$ rozcinałby sferę między punktami p_1 i p_2. Pokażemy, że jednak nie jest to możliwe. Zauważmy, że zbiory $K_+ \cup [a, b]$ oraz $K_- \cup [a, b]$ nie rozcinają sfery miedzy punktami p_1 i p_2, bowiem $\partial U_1 = K = \partial U_2$. Wynika stąd na mocy Wn., że $K \cup [a, b] = (K_+ \cup [a, b]) \cup (K_- \cup [a, b])$ też nie rozcina między tymi punktami, co prowadzi do sprzeczności. □

Rozdział 9

Teoria homologii

9.1 Kompleksy symplicjalne, homologie symplicjalne

9.2 Aksjomaty Eilenberga Steenroda

Definicja. (Eilenberg- Steenrod) *Niech $\mathcal{A}$ będzie pełną podkategorią kategorii par przestrzeni topologicznych, taką że:*

1) jeżeli $(X, A) \in \mathcal{A}$, to pary $(X, X), (X, \emptyset), (A, A), (A, \emptyset)$ oraz $(X \times I, A \times I)$ należą do $\mathcal{A}$

2) $(*, \emptyset) \in \mathcal{A}$

Parę $(X, \emptyset)$ będziemy oznaczać przez X

Teorią homologii H_* na kategorii $\mathcal{A}$ nazywamy:

- *ciąg kowariantnych funktorów $H_n : \mathcal{A} \to \mathcal{A}b$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ w kategorię grup abelowych*
- *ciąg transformacji naturalnych $\partial_n : H_n(X, A) \to H_{n-1}(A)$*

takich że:

*1) **homotopia** jeżeli $f, g : (X, A) \to (Y, B)$ są homotopijne, to $f_* = g_* : H_n(X, A) \to H_n(Y.B)$ dla każdego n;*

*2) **ciąg dokładny pary** dla dowolnej pary (X, A) ciąg*

$$\ldots \xrightarrow{j_*} H_{n+1}(X, A) \xrightarrow{\partial_{n+1}} H_n(A) \xrightarrow{i_*} H_n(X) \xrightarrow{j_*} H_n(X, A) \xrightarrow{\partial_n} H_{n-1}(A) \xrightarrow{i_*} \ldots$$

jest dokładny, gdzie $i : A \to X$ i $j : (X, \emptyset) \to (X, A)$ są włożeniami.

*3) **wycinanie** Jeżeli $U \subset X$ jest otwartym podzbiorem, takim że $\bar{U} \subseteq intA$, to włożenie $(X \setminus U, A \setminus U) \hookrightarrow (X, A)$, indukuje izomorfizm $H_n(X \setminus U, A \setminus U) \to H_n(X, A)$ dla każdego n;*

*4) **wymiar** $H_n(*) = 0$ tylko dla $n \neq 0$. Grupę $H_0(pt)$ nazywa się współczynnikami teorii.*

*5) **Milnora** Dla rodziny zbiorów $\{X_i\}_{i \in I}$ włożenia $f_i : X_i \to \coprod X_i$ indukują izomorfizm*

$$\oplus_{i \in I} H_n(X_i) \to H_n(\coprod_{i \in I} X_i)$$

9.2.1 Ciąg Mayera - Vietorisa

Definicja. *Para A, B podprzestrzeni przestrzeni $X = A \cup B$ nazywa się wycinająca, jeżeli włożenie $(A, A\cap B) \to (A\cup B, B)$ indukuje izomorfizm homologii $H_n(A, A\cap B) \to H_n(A\cup B, B)$ dla każdego n.*

Z aksjomatu wycinania wynika natychmiast następujące stwierdzenie.

Stwierdzenie 38. *Jeżeli $X = intA \cup intB$, to para A, B podprzestrzeni przestrzeni X jest wycinająca.*

Twierdzenie 20. Ciąg Mayera Vietorisa *Jeżeli para A, B podprzestrzeni przestrzeni X jest wycinająca, to następujący ciąg jest dokładny:*

$$\ldots \longrightarrow H_n(A\cap B) \xrightarrow{(j_{1*}, j_{2*})} H_n(A) \oplus H_n(B) \xrightarrow{i_{1*} - i_{2*}} H_n(X) \xrightarrow{\Delta_n} H_{n-1}(A\cap B) \longrightarrow \ldots$$

Twierdzenie to pozwala na obliczenie homologii wielu przestrzeni. Jest ono wnioskiem z aksjomatów i wynika z następującego lematu algebraicznego. My jednak wrócimy do jego dowodu dla homologii singularnych, gdzie jego dowód ma jasną geometryczną interpretację.

9.2.2 Przykłady obliczeń

Następujące stwierdzenie tłumaczy geometryczny sens homologii relatywnych.

Stwierdzenie 39. *Jeżeli $A \subset X$ jest parą Borsuka (korozwłóknieniem), to dla każdego n, przekształcenie $p : (X, A) \to (X/A, *)$ indukuje izomorfizm $H_n(X, A) \to H_n(X/A, *)$.*

Dowód. Niech CA oznacza stożek nad przestrzenią A i niech $U \subset CA$, $U = \{[(a, t)] : t > 1/2\}$. Rozważmy ciąg przekształceń:

$$(X, A) \xrightarrow{i} (X \cup CA \setminus U, CA \setminus U) \xrightarrow{j} (X \cup CA, CA) \xrightarrow{q} (X \cup CA/CA, *) = (X/A, *)$$

Jest jasne, że $qji = p$. Przekształcenie i jest homotopijną równoważnością, przekształcenie j indukuje izomorfizm homologii z aksjomatu wycinania, przekształcenie q jest homotopijną równoważnością 11. □

Poprzednie stwierdzenie pokazuje, że w naturalny sposób pojawia się potrzeba rozważania homologii pary (X, x_0), $x_0 \in X$.

Definicja. *Homologiami zredukowanymi przestrzeni X nazywamy homologie pary (X, x_0) i oznaczamy symbolem:*

$$\tilde{H}_n(X) =: H_n(X, x_0).$$

Stwierdzenie 40. *Dla dowolnej przestrzeni X i dowolnego n, $H_n(X) = \tilde{H}_n(X) \oplus H_n(*)$*

Dowód. Rozważmy ciąg pary (X, x_0). Homomorfizm $H_n(x_0) \to H_n(X)$ ma lewy odwrotny indukowany przez $X \to x_0$, stąd długi ciąg dokładny rozpada się na krótkie rozszczepialne ciągi dokładne i stąd teza. □

Uwaga 7. Niech $p : X \to *$ będzie odwzorowaniem w punkt a $p_* : H_*(X) \to H_*(*)$ homomorfizmem indukowanym na grupach homologii. Wówczas $\tilde{H}_*(X) = \ker p_*$.

Definicja. *Zawieszeniem przestrzeni X nazywamy przestrzeń $\Sigma X = X \times I/\sim$, gdzie $(x, 0) \sim (x', 0)$ i $(x, 1) \sim (x', 1)$.*

Przyporządkowanie przestrzeni jej zawieszenia definiuje funktor $\Sigma : \mathcal{T}op \to \mathcal{T}op$. Następne ważne stwierdzenie mówi, że funktory $\tilde{H}_{n+1} \circ \Sigma$ i $\tilde{H}_n$ są naturalnie izomorficzne dla każdego $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Twierdzenie 21. *Dla dowolnej przestrzeni X i dowolnego $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ istnieje naturalny izomorfizm*

$$\tilde{H}_{n+1}(\Sigma X) \xrightarrow{\cong} \tilde{H}_n(X).$$

Dowód. Rozpatrzmy ciąg dokładny pary (CX, X), zauważając że jest to para Borsuka oraz że CX/X jest homeomorficzne z ΣX:

$$\ldots \longrightarrow H_{n+1}(X) \xrightarrow{i_*} H_{n+1}(CX) \xrightarrow{j_*} H_{n+1}(CX/X, *) \xrightarrow{\delta_{n+1}} H_n(X) \xrightarrow{i_*} H_n(CX) \longrightarrow \ldots$$

$$\ldots \longrightarrow H_1(X) \xrightarrow{i_*} H_1(CX) \xrightarrow{j_*} H_1(CX/X, *) \xrightarrow{\delta_1} H_0(X) \xrightarrow{i_*} H_0(CX) \longrightarrow$$

Dla $n \geq 1$, $H_n(CX) = 0$ i δ_{n+1} jest szukanym naturalnym izomorfizmem

$$0 \longrightarrow H_{n+1}(CX/X, *) \xrightarrow{\delta_{n+1}} H_n(X) \longrightarrow 0.$$

Dla $n = 0$,

$$0 \longrightarrow H_1(CX/X, *) \xrightarrow{\delta_1} H_0(X) \xrightarrow{i_*} H_0(CX)$$

zatem $H_1(CX/X, *) \xrightarrow{\delta_1} \mathrm{im}(\delta_1) = \ker i_*$ jest izomorfizmem. Ale stożek CX jest ściągalny i $\ker i_* \cong \tilde{H}_0(X)$. □

Powyższe twierdzenie natychmiast pozwala na policzenie grup homologii sfer. Wystarczy zauważyć, że $S^n \cong SS^{n-1}$ oraz że $\tilde{H}_0(S^0) = H_0(*)$.

Twierdzenie 22. *Dla sfery S^n:*

$$\tilde{H}_k(S^n) = \begin{cases} H_0(*) & \text{dla } k = n \\ 0 & \text{dla } k \neq n \end{cases}.$$

To obliczenie oraz wynikająca z funktorialności uwaga, że jeżeli dla $A \subset X$, $r : X \to A$ jest retrakcją, to $r_* : H_*(X) \to H_*(A)$ oraz $r_* : \tilde{H}_*(X) \to \tilde{H}_*(A)$ są epimorfizmami łatwo prowadzą do dowodu twierdzenia Brouwera:

Twierdzenie 23. (Brouwera o punkcie stałym) *Każde ciągłe przekształcenie dysku $f : D^n \to D^n$, $n \geq 1$ ma punkt stały.*

Dowód. Wystarczy pokazać, że nie istnieje retrakcja $r : D^n \to S^{n-1}$. Taka retrakcja indukowałaby epimorfizm $r_* : \tilde{H}_{n-1}(D^n) = 0 \to \tilde{H}_{n-1}(S^{n-1})$, co jest niemożliwe. □

Załóżmy teraz, że dla teorii spełniającej aksjomaty Eilenberga Steenroda mamy $H_0(*) = \mathbb{Z}$.

Definicja. *Niech $f : S^n \to S^n$, $n \geq 0$ i niech $f_* : \tilde{H}_n(S^n) \to H_n(S^n)$. Wówczas $f_*x = ax$ i liczbę całkowitą $a \in \mathbb{Z}$ nazywamy stopniem przekształcenia f i oznaczamy symbolem* $\deg f$.

Stwierdzenie 41. *Niech $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ i niech f będzie symetrią względem hiperpłaszczyzny $x_1 = 0$. Wówczas* $\deg f = -1$.

Dowód. Dowód przez indukcję ze względu na n: $n = 0$:$S^0 = \{-1, 1\}$ i symetria f transponuje te punkty. $H_0(S^0) = H_0(\{-1\}) \oplus H_0(\{1\})$ i $f_*(a, b) = (b, a)$. $\tilde{H}_0(S^0) = \ker(H_0(S^0) \to H_0(pt)) = \{(a, b) \colon a = -b\}$. Zatem f_* obcięte do homologii zredukowanych przekształca parę $(a, -a)$ na parę $(-a, a)$ załóżmy, że twierdzenie jest prawdziwe dla $n - 1$. W sferze S^n rozpatrzmy dwa podzbiory: "pólkulę północną" $D^+_n = \{(x_1, \ldots x_{n+1}) \colon x_{n+1} \geq 0\}$ i "południową"

$D_n^- = \{(x_1, \ldots x_{n+1}) \colon x_{n+1} \le 0\}$ - obie są zachowywane przez symetrię względem hiperpłaszczyzny $x_1 = 0$. Rozpatrzmy przemienny diagram:

$$\begin{tikzcd}
\tilde{H}_n(S^n) \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "f_*"] & H_n(S^n, D_n^+) \arrow[d, "f_*"] & H_n(D_n^-, S^{n-1}) \arrow[l, "\cong"'] \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "f_*"] & \tilde{H}_{n-1}(S^{n-1}) \arrow[d, "f_*"] \\
\tilde{H}_n(S^n) \arrow[r, "\cong"] & H_n(S^n, D_n^+) & H_n(D_n^-, S^{n-1}) \arrow[l, "\cong"'] \arrow[r, "\partial"] & \tilde{H}_{n-1}(S^{n-1})
\end{tikzcd}$$

Wszystkie poziome strzałki są izomorfizmami, ostatnia z długiego ciągu dokładnego pary. Prawa pionowa strzałka jest mnożeniem przez -1, zatem lewa też.

$\square$

Wniosek 28. *Stopień antypodyzmu $S^n \to S^n$ wynosi $(-1)^{n+1}$*

Wniosek 29. *Jeżeli n jest parzyste, to dla każdego przekształcenia $f : S^n \to S^n$ istnieje punkt $x \in S^n$, dla którego $f(x) = \pm x$.*

9.3 Kompleksy łańcuchowe i ich homologie

Niech R będzie ustalonym pierścieniem przemiennym z 1.

Definicja. ***Kompleksem łańcuchowym*** *R – modułów nazywamy ciąg R – modułów i homomorfizmów*

$$\ldots \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} \ldots \qquad n \in \mathbb{Z}$$

taki, że dla każdego n,

$$\partial_{n-1} \circ \partial_n = 0.$$

Homomorfizmy ∂_n nazywamy homomorfizmami brzegu.

Kompleks łańcuchowy będziemy oznaczać symbolem $C = (C_*, \partial_*)$ albo dla uproszczenia po prostu C_*.

Definicja. *Przekształceniem łańcuchowym $f : C_* \to C'_*$ kompleksów łańcuchowych nazywamy ciąg homomorfizmów R-modułów, $f_n \colon C_n \longrightarrow C'_n$, dla którego poniższy diagram jest przemienny:*

$$\begin{tikzcd}
\ldots \arrow[r, "\partial_{n+1}"] & C_n \arrow[r, "\partial_n"] \arrow[d, "f_n"'] & C_{n-1} \arrow[r, "\partial_{n-1}"] \arrow[d, "f_{n-1}"'] & \ldots \\
\ldots \arrow[r, "\partial_{n+1}"] & C'_n \arrow[r, "\partial_n"] & C'_{n-1} \arrow[r, "\partial_{n-1}"] & \ldots
\end{tikzcd}$$

Możemy więc mówić o kategorii kompleksów łańcuchowych R − modułów i przekształceń łańcuchowych. Będziemy ją oznaczać $\mathcal{C}C_R$.

Definicja. *Podmoduł $ker\partial_n$ nazywamy podmodułem n – wymiarowych **cykli** i oznaczamy symbolem $Z_n(C_*)$ zaś podmoduł $im\partial_{n+1}$ podmodułem n – wymiarowych **brzegów** i oznaczamy symbolem $B_n(C_*)$. Oczywiście mamy zawieranie $B_n(C_*) \leqslant Z_n(C_*)$.*

Wprowadzamy definicję:

Definicja. *Modułami homologii kompleksu łańcuchowego $C = (C_*, \partial_*)$ nazywamy moduły ilorazowe*

$$H_n(C) \;=\; Z_n(C_*)/B_n(C_*) \qquad n \in \mathbb{Z}$$

Wygodnie jest rozpatrywać wszystkie moduły homologii jednocześnie - piszemy wtedy

$$H(C_*) = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} H_n(C_*)$$

i mówimy, że mamy R – moduł z gradacją.

Nietrudno zauważyć, że przekształcenie łańcuchowe $f : C_* \to C'_*$ kompleksów łańcuchowych definiuje homomorfizm ich modułów homologii:

$$f_* : H_n(C_*) \to H_n(C'_*), \qquad n \in \mathbb{Z},$$

co zapisujemy $f_* : H(C_*) \to H(C'_*)$. Mamy więc funktor $H : \mathcal{C}C_R \to \mathcal{M}odgr_R$ z kategorii kompleksów łańcuchowych w kategorię R – modułów z gradacją.

9.3.1 Homotopia łańcuchowa

Wprowadzamy definicję, która jest algebraicznym odpowiednikiem pojęcia homotopii przekształceń ciągłych:

Definicja. *Przekształcenia łańcuchowe $f,\, g : C_* \longrightarrow C'_*$ są łańcuchowo homotopijne wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje ciąg homomorfizmów R-modułów $D_n \colon C_n \longrightarrow C'_{n+1}$,*

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, "\partial_{n+2}"] & C_{n+1} \arrow[r, "\partial_{n+1}"] \arrow[dl, "D_{n+1}"'] \arrow[d, shift right, "f_{n+1}"'] \arrow[d, shift left, "g_{n+1}"] & C_n \arrow[r, "\partial_n"] \arrow[dl, "D_n"'] \arrow[d, shift right, "f_n"'] \arrow[d, shift left, "g_n"] & C_{n-1} \arrow[r, "\partial_{n-1}"] \arrow[dl, "D_{n-1}"'] \arrow[d, shift right, "f_{n-1}"'] \arrow[d, shift left, "g_{n-1}"] & C_{n-2} \arrow[r, "\partial_{n-1}"] \arrow[dl, "D_{n-2}"'] \arrow[d, shift right, "f_{n-2}"'] \arrow[d, shift left, "g_{n-2}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r, "\partial_{n+2}"] & C'_{n+1} \arrow[r, "\partial_{n+1}"] & C'_n \arrow[r, "\partial_n"] & C'_{n-1} \arrow[r, "\partial_{n-1}"] & C'_{n-2} \arrow[r, "\partial_{n-1}"] & \cdots
\end{tikzcd}$$

taki że dla każdego n

$$\partial_{n+1} D_n + D_{n-1}\partial_n \;=\; f_n - g_n.$$

łańcuchowa homotopia jest oczywiście relacją równoważności i mówimy o klasach homotopii łańcuchowej przekształceń łańcuchowych.

Definicja. *Przekształcenie łańcuchowe $f_* \colon C_* \longrightarrow C'_*$ jest łańcuchową homotopijną równoważnością wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje przekształcenie łańcuchowe $g \colon C'_* \longrightarrow C_*$, dla którego złożenia $g \circ f$ i $f \circ g$ są łańcuchowo homotopijne z identycznościami na kompleksach C_* i C'_* odpowiednio.*

Kategorię kompleksów łańcuchowych i klas homotopii przekształceń łańcuchowych oznaczamy symbolem $\mathcal{C}Ch_R$. Funktor homologii jest funktorem dobrze zdefiniowanym na kategorii $\mathcal{C}Ch_R$, co jest treścią poniższego twierdzenia:

Twierdzenie 24. *Przekształcenia łańcuchowo homotopijne kompleksów łańcuchowych indukują ten sam homomorfizm ich grup homologii w każdym wymiarze.*

Dowód. Jeżeli $x \in Z_n(C_*)$ będzie cyklem, Wówczas

$$f_n(x) - g_n(x) = \partial_{n+1} D_n(x) + D_{n-1}\partial_n(x) = \partial_{n+1} D_n(x),$$

bo $\partial_n(x) = 0$. Wynika z tego, że $f_n(x)$ i $g_n(x)$ różnią się o brzeg, więc klasy homologii $f_n(x)$ i $g_n(x)$ są równe. □

Wniosek 30. *Przekształcenie łańcuchowe będące łańcuchową równoważnością indukuje izomorfizm grup homologii.*

Jeżeli R jest pierścieniem liczb całkowitych $\mathbb{Z}$, to mówimy o kompleksach grup abelowych i ich grupach homologii.

Definicja. *Jeżeli $C'_* \leqslant C_*$ jest podkompleksem kompleksu łańcuchowego, to kompleksem ilorazowym C_*/C'_* nazywamy kompleks*

$$\ldots \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n/C'_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1}/C'_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} \ldots,$$

w którym homomorfizmy brzegu są indukowane przez homomorfizmy brzegu kompleksu C.

Moduły homologii kompleksu C_*/C'_* oznaczamy symbolem $H(C_*, C'_*)$ i nazywamy modułem homologii pary (C_*, C'_*).

9.3.2 Lemat o wężu

Definicja. *Ciąg $0 \to C'_* \to C_* \to C''_* \to 0$ kompleksów łańcuchowych nazywa się dokładny, jeżeli dla każdego $n \in \mathbb{Z}$ ciąg $0 \to C'_n \to C_n \to C''_n \to 0$ jest dokładny.*

Ciąg jak wyżej nazywa się krótkim ciągiem dokładnym kompleksów łańcuchowych. Indukuje on długi ciąg dokładny grup homologii i to stwierdzenie nosi nazwę lematu o wężu.

Lemat 5. (o wężu) *Jeżeli ciąg kompleksów łańcuchowych $0 \longrightarrow C'_* \xrightarrow{i_*} C_* \xrightarrow{j_*} C''_* \longrightarrow 0$ jest dokładny, to istnieje naturalny homomorfizm $\partial : H(C''_*) \to H(C'_*)$ stopnia -1, taki że dokładny jest ciąg:*

$$\ldots \xrightarrow{\partial_{n+1}} H_n(C'_*) \xrightarrow{i_*} H_n(C_*) \xrightarrow{j_*} H_n(C_*, C'_*) \xrightarrow{\partial_n} H_{n-1}(C'_*) \xrightarrow{i_*} \ldots.$$

Dowód. Zaczynamy od definicji naturalnego homomorfizmu ∂:Rozważmy przemienny diagram, w którym kompleksy łańcuchowe napiszemy pionowo.

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & C'_{n+1} & \xrightarrow{i_{n+1}} & C_{n+1} & \xrightarrow{j_{n+1}} & C''_{n+1} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle \partial_{n+1}} & & \downarrow{\scriptstyle \partial_{n+1}} & & \downarrow{\scriptstyle \partial_{n+1}} & & \\
0 & \longrightarrow & C'_n & \xrightarrow{i_n} & C_n & \xrightarrow{j_n} & C''_n & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle \partial_n} & & \downarrow{\scriptstyle \partial_n} & & \downarrow{\scriptstyle \partial_n} & & \\
0 & \longrightarrow & C'_{n-1} & \xrightarrow{i_{n-1}} & C_{n-1} & \xrightarrow{j_{n-1}} & C''_{n-1} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & &
\end{array}$$

Jeżeli $x'' \in Z_n(C''_*)$, to z dokładności niech $x \in C_n$ będzie takie, że $j_n(x) = x''$. Z przemienności wynika, że $\partial_n(x) \in \ker j_{n-1}$ a zatem istnieje $x' \in C'_{n-1}$, dla którego $i_{n-1}(x') = x$. Definiujemy $\partial_n([x'']) = [x']$, gdzie $[x]$ i $[x']$ oznaczają klasy homologii. Należy sprawdzić, że ta definicja jest poprawna, czyli:

- x' jest cyklem;
- klasa homologii $[x']$ nie zależy od wyboru reprezentanta z klasy $[x'']$;
- klasa homologii $[x']$ nie zależy od wyboru elementu $x \in j_n^(- 1)(x'')$.

Należy także sprawdzić, że długi ciąg grup homologii jest dokładny. $\square$

Uwaga 8. Możemy tak przenumerować indeksy, by homomorfizmy brzegu podwyższały indeks o jeden. Mówimy wówczas o kompleksie kołańcuchowym, homomorfizmach kobrzegu, kocyklach i kobrzegach oraz modułach kohomologii. Wszystkie pojęcia wprowadzane dla kompleksów łańcuchowych i dotyczące ich stwierdzenia mają swoje oczywiste odpowiedniki dla kompleksów kołańcuchowych.

Przykład 24. Jeżeli M jest rozmaitością różniczkową, niech $C^n(M) = \Omega^n(M)$ oznacza rzeczywistą przestrzeń liniową gładkich $n-$form różniczkowych na M (gdzie 0-formy, to rzeczywiste funkcje gładkie), zaś $\partial^n \colon \Omega^n(M) \longrightarrow \Omega^{n+1}(M)$ niech będzie różniczkowaniem zewnętrznym. W ten sposób rozmaitości przypisujemy kompleks kołańcuchowy rzeczywistych przestrzeni liniowych, zaś funkcji gładkiej przekształcenie kołańcuchowe. Otrzymane w ten sposób grupy kohomologii nazywamy grupami kohomologii de Rhama rozmaitości różniczkowej.

9.4 Homologie singularne - definicja i sprawdzenie aksjomatów Eilenberga Steenroda

Zdefiniujemy teraz funktor, który prowadzi z kategorii $\mathcal{T}op$ w kategorię ograniczonych z dołu kompleksów łańcuchowych grup abelowych.
Niech $\triangle^n$ będzie n– wymiarowym sympleksem o zbiorze wierzchołków $\{0, 1, \ldots, n\}$.

Definicja. *i – tą ścianą sympleksu $\triangle^n$ nazywamy przekształcenie*

$$\delta_n^i : \triangle^{n-1} \to \triangle^n$$

zadane przez

$$\{0, 1, \ldots, n-1\} \to \{0, 1, \ldots, i-1, \check{i}, i+1, \ldots, n\}$$

Stwierdzenie 42. *Dla $j < i$ zachodzi równość:*

$$\delta_n^i \delta_{n-1}^j = \delta_n^j \delta_{n-1}^{i-1}.$$

Definicja. *Jeżeli X jest przestrzenią topologiczną, to n – wymiarowym sympleksem singularnym w X nazywamy dowolne ciągłe przekształcenie $\sigma : \triangle^n \to X$.*

Definicja. *Niech $S_n(X)$, $n \geq 0$ będzie wolną grupą abelową generowaną przez n – wymiarowe sympleksy singularne w X. Niech $\partial_n : S_n(X) \to S_{n-1}(X)$ będzie zadane dla $n \geq 1$ wzorem*

$$\partial_n(\sigma) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^n \sigma \circ \delta_n^i.$$

Przyjmujemy $S_n(X) = 0$ dla $n < 0$ i $\partial_0 : S_0(X) \to S_{-1}(X) = 0$ homomorfizm zerowy.

Stwierdzenie 43. *Dla każdego $n \geq 0$ zachodzi równość*

$$\partial_{n-1}\partial_n = 0.$$

Definicja. *Kompleks łańcuchowy $S(X)$*

$$\ldots \xrightarrow{\partial_{n+1}} S_n(X) \xrightarrow{\partial_n} S_{n-1}(X) \xrightarrow{\partial_{n-1}} \ldots \xrightarrow{\partial_2} S_1(X) \xrightarrow{\partial_1} S_0(X) \longrightarrow 0$$

nazywamy ***k****ompleksem łańcuchów singularnych przestrzeni X.*

Jeżeli $A \subseteq X$ jest podprzestrzenią, to kompleks ilorazowy $S(X)/S(A)$ nazywamy ***k****ompleksem łańcuchów singularnych pary (X, A).*

Twierdzenie 25. *Przyporządkowanie parze przestrzeni topologicznych kompleksu łańcuchów singularnych tej pary definiuje funktor $S : \mathcal{T}op_2 \to \mathcal{C}_{\mathbb{Z}}$ z kategorii par przestrzeni topologicznych w kategorię kompleksów łańcuchowych grup abelowych.*

Definicja. *Grupami homologii singularnych przestrzeni X nazywamy grupy homologii $H_*(S(X))$ i oznaczamy symbolem $H_*(X)$, Grupami homologii singularnych pary przestrzeni (X, A) nazywamy grupy homologii $H_*(S(X)/S(A))$ i oznaczamy symbolem $H_*(X, A)$.*

Grupy homologii pary $(X, \emptyset)$ utożsamiamy z grupami homologii przestrzeni X.

Niech G będzie dowolną grupą abelową. Kompleks łańcuchowy $S(X) \otimes G$ to kompleks

$$\dots \xrightarrow{\partial_{n+1}\otimes id} S_n(X) \otimes G \xrightarrow{\partial_n\otimes id} S_{n-1}(X) \otimes G \xrightarrow{\partial_{n-1}\otimes id} \dots\dots \longrightarrow S_1(X) \otimes G \xrightarrow{\partial_1\otimes id} S_0(X) \otimes G \longrightarrow 0$$

Twierdzenie 26. *Grupy homologii singularnych spełniają aksjomaty Eilenberga Steenroda*

Dowód tego twierdzenia można znaleźć na przykład w skrypcie Stanisława Betleya: http://duch.mimuw.edu.pl/ betley/wyklad2/TopologiaII.pdf

Definicja. *Grupami homologii singularnych przestrzeni X (pary (X, A)) o współczynnikach w grupie G nazywamy grupy homologii kompleksu łańcuchowego $S(X) \otimes G$ i $S(X)/S(A) \otimes G$ odpowiednio.*

9.5 Transfer dla nakryć

Rozważmy teraz jak zachowują się homomorfizmy grup homologii indukowane przez nakrycie skończone.

Twierdzenie 27. *Niech $p : \tilde{X} \to X$ będzie nakryciem krotności n. Wówczas istnieje homomorfizm zwany transferem*

$$t : H_*(X) \to H_*(\tilde{X}),$$

taki, że $p_* t : H_*(X) \to H_*(X)$ jest mnożeniem przez n.

Dowód. Skonstruujemy przekształcenie łańcuchowe kompleksów łańcuchów singularnych $S_*(X) \to S_*(\tilde{X})$. Definiujemy je na generatorach: Niech $\sigma : \Delta^n \to X$ będzie sympleksem singularnym. Dla każdego z n punktów we włóknie $p^{-1}(\sigma(0))$ istnieje dokładnie jedno podniesienie $\tilde{\sigma}_i : \Delta^n \to \tilde{X}$. Definiujemy $t(\sigma) = \tilde{\sigma}_1 + \dots + \tilde{\sigma}_n$. Jest to oczywiście przekształcenie łańcuchowe i definiuje homomorfizm $t : H_*(X) \to H_*(\tilde{X})$ o żądanych własnościach.

$\square$

9.6 Twierdzenie Hurewicza

Przypomnijmy, że n-ta grupa homotopii, to $\pi_n(X, x_0) = [(S^n, 1), (X, x_0)]_*$. Mamy więc dwa funktory z kategorii $\mathcal{T}op_*$ przestrzeni z wyróżnionym punktem do kategorii grup: grupy homotopii i grupy homologii. Istnieje transformacja naturalna między nimi, zwana homomorfizmem Hurewicza i zaczniemy od definicji tego homomorfizmu.
Najpierw wybieramy generator grupy $\tilde{H}_0(S^0) \cong \mathbb{Z}$. Generatory grup $H_n(S^n)$ niech będą zadane przez kolejne izomorfizmy zawieszenia 21. Wybrany generator oznaczamy symbolem 1.

Definicja. *Dla $n \geq 1$ definiujemy*

$$H : \pi_n(X, x_0) \to H_n(X)$$

wzorem

$$H(\sigma) = \sigma_*(1), \text{ gdzie } \sigma \in [(S^n, 1), (X, x_0)]_* = \pi_n(X, x_0).$$

Twierdzenie Hurewicza dotyczy własności tego przekształcenia:

Twierdzenie 28. (Hurewicza) *Dla każdego $n \geq 1$ homomorfizm Hurewicza jest transformacją naturalną funktorów określonych na kategorii przestrzeni z wyróżnionym punktem do kategorii grup.*

$$H : \pi_n(X, x_0) \to H_n(X).$$

Ponadto dla łukowo spójnej przestrzeni X:

- *jeżeli $n = 1$, to H indukuje izomorfizm*

$$\pi_1(X, x_0)/[\pi_1(X, x_0), \pi_1(X, x_0)] \to H_1(X).$$

- *jeżeli $n > 1$ oraz $\pi_1(X, x_0) = \cdots = \pi_{n-1}(X, x_0) = 0$, to $H_1(X) = \cdots = H_{n-1}(X) = 0$ i homomorfizm H jest izomorfizmem $H : \pi_n(X, x_0) \to H_n(X)$.*

Udowodnimy to twierdzenie tylko dla $n = 1$. Oznacza to, że musimy uzasadnić następujące stwierdzenia:

a) $H : \pi_1(X, x_0) \to H_1(X)$ jest homomorfizmem;

b) H jest transformacją naturalną, tzn. dla $f : X \to Y$ następujący diagram jest przemienny:

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(X, x_0) \arrow[r, "f_\sharp"] \arrow[d, "H"] & \pi_1(Y, f(x_0)) \arrow[d, "H"] \\
H_1(X) \arrow[r, "f_*"] & H_1(Y)
\end{tikzcd}$$

c) H indukuje izomorfizm $\pi_1(X, x_0)/[\pi_1(X, x_0), \pi_1(X, x_0)] \to H_1(X)$.

Dowód.

Ad a) Niech $\omega, \tau \in \pi_1(X, x_0) = [(S^n, 1), (X, x_0)]_*$. Wówczas złożenie $\omega * \tau$ jest reprezentowane przez złożenie

$$S^1 \xrightarrow{\mu} S^1 \vee S^1 \xrightarrow{\omega \vee \tau} (X, x_0).$$

Indukuje ono na grupach homologii:

$$H_1(S^1) \xrightarrow{\mu_*} H_1(S^1) \oplus H_1(S^1) \xrightarrow{\omega_* + \tau_*} H_1(X, x_0).$$

Zatem $(\omega_* + \tau_*)\mu_*(1) = (\omega_* + \tau_*)(1, 1) = \omega_*(1) + \tau_*(1) = H(\omega) + H(\tau)$.

Ad b) Jest oczywiste

Ad c) Zauważmy, że skoro H jest homomorfizmem grup o wartościach w grupie przemiennej, to wyznacza jednoznacznie homomorfizm $\pi_1(X, x_0)/[\pi_1(X, x_0), \pi_1(X, x_0)] \to H_1(X)$, który dla prostoty zapisu, będziemy także oznaczać symbolem H. Abelianizację grupy podstawowej $\pi_1(X, x_0)/[\pi_1(X, x_0), \pi_1(X, x_0)]$ oznaczać będziemy symbolem $\pi_1(X.x_0)_{ab}$.
Zdefiniujemy homomorfizm odwrotny do homomorfizmu H. W tym celu, dla każdego punktu $x \in X$ wybierzemy drogę $\lambda_x : I \to X$, $\lambda_x(0) = x_0$, $\lambda_x(1) = x$, Zakładamy, że droga λ_{x_0} jest drogą stałą.

Krok 1: Definiujemy $\Psi : S_1(X) \to \pi_1(X.x_0)_{ab}$ określając go na generatorach (możemy tak, bo przeciwdziedzina jest grupą abelową!!): Niech $\sigma : \Delta^1 \to X$ będzie sympleksem singularnym. $\Psi(\sigma) = [\lambda_{\sigma(0)} * \sigma * \lambda_{\sigma(1)}^{-1}]$, gdzie $[\cdot]$ oznacza klasę homotopii pętli w $\pi_1(X.x_0)_{ab}$.

Krok 2: Sprawdzamy, że $\Psi(B_1(X)) = 0$. Wystarczy w tym celu pokazać, że dla dowolnego dwuwymiarowego sympleksu $\sigma : \Delta^2 \to X$, $\Psi(\partial\sigma) = 0$. Ścianę przeciwległą do i–tego wierzcholka oznaczamy σ^i. Zatem

$$\Psi(\partial\sigma) = \Psi(\sigma^2 + \sigma^0 - \sigma^1) = \Psi(\sigma^2) * \Psi(\sigma^0) * (\Psi(\sigma^1))^{-1} =$$

$$= [\lambda_{\sigma(0)} * \sigma^2 * \lambda_{\sigma(1)}^{-1} * \lambda_{\sigma(1)} * \sigma^0 * \lambda_{\sigma(2)}^{-1} * \lambda_{\sigma(2)} * (\sigma^1)^{-1} * \lambda_{\sigma(0)}^{-1}] =$$

$$= [\lambda_{\sigma(0)} * \sigma^2 * \sigma^0 * (\sigma^1)^{-1} * \lambda_{\sigma(0)}^{-1}].$$

Pętla $\sigma^2 * \sigma^0 * (\sigma^1)^{-1}$ ogranicza obraz $\sigma(\Delta^2)$, więc jest ściągalna, zatem pętla $[\lambda_{\sigma(0)} * \sigma^2\sigma^0(\sigma^1)^{-1} * \lambda_{\sigma(0)}] = [\lambda_{\sigma(0)} * \lambda_{\sigma(0)}^{-1}]$ jest elementem trywialnym w $\pi_1(X.x_0)_{ab}$. Wynika z tego, że Ψ definiuje homomorfizm $H_1(X) \to \pi_1(X.x_0)_{ab}$ – nadal będziemy go oznaczać symbolem Ψ. (patrz rysunek po dowodzie)

Krok 3: Sprawdzamy, że $\Psi \circ H = id_{\pi_1(X.x_0)_{ab}}$. Jeżeli ω jest pętlą, to klasa homologii $\omega_*(1) = H(\omega)$ jest reprezentowana przez cykl $\omega : \Delta^1 \to X$, i $\Psi[\omega] = [\lambda_{x_0} * \omega * \lambda_{x_0}^{-1}] = [\omega]$, bo λ_{x_0} jest drogą stałą.

Krok 4: Sprawdzamy, że $H \circ \Psi = id_{H_1(X)}$. Niech $\sigma : \Delta^1 \to X$ będzie sympleksem singularnym. Wówczas $H \circ \Psi(\sigma)$ jest cyklem reprezentowanym przez pętlę $\lambda_{\sigma(0)} * \sigma * \lambda_{\sigma(1)}^{-1}$. Zauważmy, że ma miejsce następujący lemat:

Lemat 6. *Klasa homologii cyklu $[\lambda_{\sigma(0)} * \sigma * \lambda_{\sigma(1)}^{-1}]$ jest równa klasie homologii cyklu będącego łańcuchem $[\lambda_{\sigma(0)} + \sigma - \lambda_{\sigma(1)}]$*

Wygodnie będzie wprowadzić następujące oznaczenie: dla 0 łańcucha $c' = \sum a_i x_i \in S_0(X)$, $\lambda_{c'} = \sum a_i \lambda_{x_i}$. Stosując tę konwencję mamy dla sympleksu singularnego σ

$$H \circ \Psi(\sigma) = [\lambda_{\sigma(0)} + \sigma - \lambda_{\sigma(1)}] = [\sigma + \lambda_{\partial\sigma}].$$

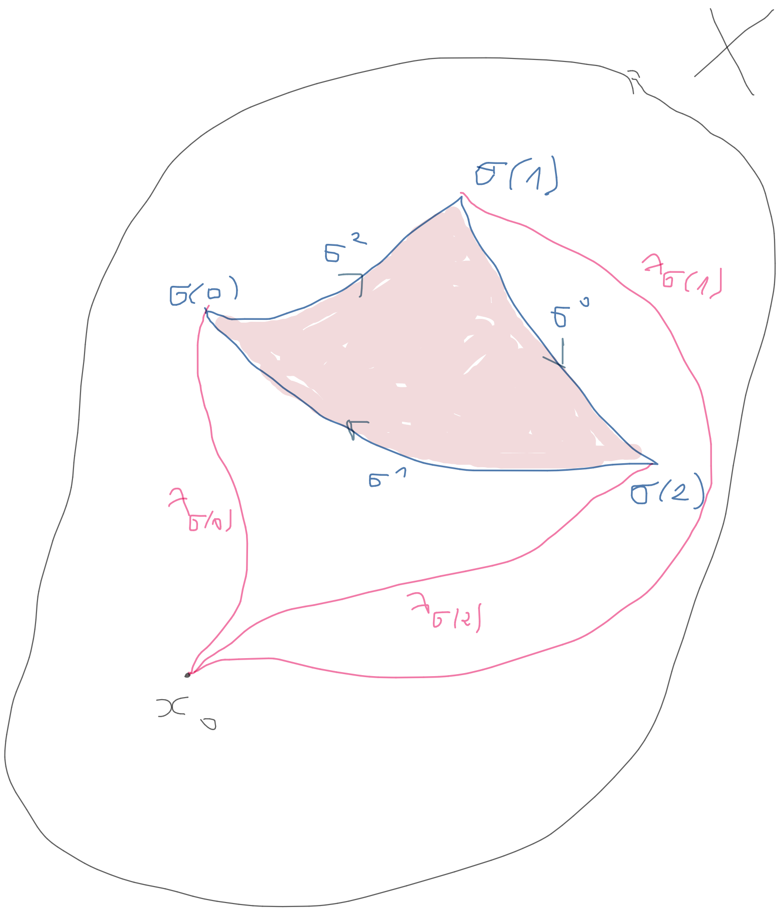
Ponieważ, H i Ψ są homomorfizmami, to dla dowolnego 1– łańcucha $c \in S_1(X)$ mamy

$$H \circ \Psi(c) = [c + \lambda_{\partial c}].$$

Jeżeli c jest cyklem, to $H \circ \Psi(c) = [c]$, co kończy dowód

□

Dowód. Lematu 6 Wystarczy pokazać, że jeżeli ω, τ, są jednowymiarowymi sympleksami singularnymi w X oraz $\omega(1) = \tau(0)$ to łańcuch $\omega + \tau - \omega * \tau$ jest brzegiem w $S_1(X)$. Rozważmy dwuwymiarowy sympleks singularny:$\sigma : \Delta^2 \to X$, taki, że na ścianie σ^1 przeciwległej do wierzchołka 1, to $\omega * \tau$, na ścianie σ^2 to ω a na ścianie σ^0 to jest τ oraz odwzorowanie σ jest stałe na każdym odcinku równoległym do środkowej ściany σ^1. Jasne, że $\partial\sigma = \omega + \tau - \omega * \tau$. □



X
σ(0)
σ(1)
σ(2)
σ^2
σ^1
σ^0
γ_σ(0)
γ_σ(1)
γ_σ(2)
x_0