Uniwersalne nakrycie abelowe

5 maja 2020

Uwaga: Rozważamy jedynie nakrycia spójne nad lokalnie łukowo spójną przestrzenią X, oraz wszystkie przestrzenie są punktowane

Nakryciem abelowym nazywamy, $Y \xrightarrow{p_Y} X$ H-nakrycie, dla H abelowego.

Oznaczmy grupę $\pi(X, x_0)$ jako G, oraz ustalmy $\tilde{X} \xrightarrow{\pi} X$ nakrycie uniwersalne.

Uniwersalnym nakryciem abelowym nazywamy:

$$\tilde{X}_{ab} := G/[G,G] \times_G \tilde{X}$$

wraz z odwzorowaniem nakrywającym:

$$\pi_{ab} : \tilde{X}_{ab} \to X$$

$$\pi_{ab}([x,g]) = \pi(x)$$

Jest jasnym, że G-zbiór odpowiadający $\tilde{X}_{ab}$ to $G/[G,G]$, abelianizacja grupy G.

Udowodnimy teraz własność uniwersalną tak określonego nakrycia, dla dowolnego **abelowego** nakrycia $Y \xrightarrow{p_Y} X$ istnieje jednoznacznie wyznaczony morfizm nakryć $f : \tilde{X}_{ab} \to Y$ taki, że poniższy diagram jest przemienny:

Diagram 1

$$\begin{tikzcd} \tilde{X}_{ab} \arrow[r, dotted, "f"] \arrow[dr, "\pi_{ab}"'] & Y \arrow[d, "p_Y"] \\ & X \end{tikzcd}$$

Inaczej $\tilde{X}_{ab}$ jest obiektem początkowym kategorii nakryć abelowych.

Dowód: W kategorii grup abelianizacja posiada własność uniewersalną, dla dowolnego homomorfizmu $G \to H$ dla H grupy abelowej istnieje jednoznacznie wyznaczone $\tilde{k}$:

Diagram 2

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "k"] \arrow[d, "p"] & H \\ G/[G,G] \arrow[ur, dotted, "\tilde{k}"] & \end{tikzcd}$$

Dla $N \triangleleft G$, grupę G/N traktujemy jak prawy G zbiór, z działaniem $g \in G$ $k * g = k * [g]$. Zauważmy, że rzutownanie jest $G/I \to G/K$ przekształceniem ekwiwariantym i jednocześnie homomorfizmem.

Z własności uniwersalnej nakrycia $\tilde{X}$ istnieje jednoznacznie wyznaczony morfizm nakryć $h : \tilde{X} \to Y$, odpowiada on (używając równoważności tych kategorii i faktu, że każde nakrycie abelowe jest regularne), homomorfizmowi grup $h : G \to H_Y$.

Z własności uniwersalnej abelianizacji faktoryzuje się (patrz diagram 2) on za pomocą $\tilde{h}$, które ponownie jest rzutowaniem, więc także przekształceniem ekwiwariantnym. Na poziomie morfizmów równoważność kategorii to bijekcja, więc wracając dostajemy szukany morfizm nakryć. Jednoznaczność mamy daną, ponieważ rozważamy przestrzenie punktowane.