1 Kategorie i funktory.

1.1. Zbadać zachowywanie granic prostych i odwrotnych przez następujące funktory:

1. Funktor zapominania z kategorii zbiorów punktowanych do kategorii zbiorów;
2. Funktor włożenia kategorii grup abelowych w kategorię wszystkich grup
3. Funktor $\mathrm{Hom}(-, W)\colon \mathcal{V}ect \to \mathcal{V}ect$ oraz $\mathrm{Hom}(V, -)\colon \mathcal{V}ect^{op} \to \mathcal{V}ect$ gdzie $\mathcal{V}ect$ jest kategorią skończenie wymiarowych przestrzeni wektorowych nad ciałem F.

1.2. Zbadać, czy w kategorii homotopii przestrzeni topologicznych istnieją produkty i koprodukty.

1.3. Niech $G - Set$ będzie kategorią G-zbiorów, a $H \subset G$ będzie podgrupą. Zbadać, czy funktor zapominania $G{-}Set \to H{-}Set$ posiada funktory dołączone z prawej i lewej strony.

1.4. Niech $\mathcal{C}$ będzie kategorią i niech $\hat{\mathcal{C}}$ oznacza kategorię funktorów $\mathcal{C}^{op} \to \mathcal{S}et$.

1. Pokazać, że w kategorii $\hat{\mathcal{C}}$ istnieją granice proste i odwrotne.
2. Pokazać,że funktor Yonedy $h_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \to \hat{\mathcal{C}}$ jest przemienny z granicą odwrotną.
3. Pokazać,że funktor Yonedy $h_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \to \hat{\mathcal{C}}$ nie jest przemienny z granicą prostą.

Definicja. *Niepusta kategoria $\mathcal{C}$ nazywa się filtrująca jeżeli*

1. *dla dowolnych obiektów a,b istnieje c i morfizmy $a \to c$ i $b \to c$*
2. *dla morfizmów $\varphi : a \to b$ i $\psi : a \to b$ istnieje $\xi : b \to c$, dla którego $\xi \circ \varphi = \xi \circ \psi$.*

1.5. Niech $\mathcal{C}$ będzie kategorią filtrującą. Niech $\check{\mathcal{C}}$ oznacza kategorię funktorów kowariantnych $\mathcal{C} \to \mathcal{S}et$. Niech $\mathcal{I}$ będzie małą kategorią. Pokazać, że funktor

$$colim_I : \check{\mathcal{C}} \to \mathcal{S}et$$

jest przemienny ze skończonymi granicami (czyli z granicami odwrotnymi po skończonej kategorii).

1.6. Niech $\mathcal{A}$ będzie małą kategorią, a $\mathcal{S}$ kategoria w której istnieją pullbacki. Niech $F, G : \mathcal{A} \to \mathcal{S}$ będą funktorami., a $\alpha : F \to G$ naturalną transfomacją. Pokazać, że α jest monomorfizmem wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego obiektu A kategorii $\mathcal{A}$, $\alpha(A) : F(A) \to G(A)$ jest monomorfizmem.

1.7. Niech $\mathcal{A}$ będzie małą kategorią a $F : \mathcal{A}^{op} \to \mathcal{S}et$ funktorem. Zdefiniujemy kategorię $\mathcal{E}(F)$ - jej obiektami są pary (A, x), gdzie $x \in F(A)$ a morfizmami między (A, x) a (A', x') takie morfzmy $\varphi : A \to A'$ dla których $F(\varphi)(x) = x'$. Niech $P : \mathcal{E}(F) \to \mathcal{A}$ będzie funktorem "projekcji", to jest $P((A, x)) = A$ i $P(f) = f$. Niech $h_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \to \hat{\mathcal{A}}$ będzie zanurzeniem Yonedy. Rozważmy diagram kontrawariantnych funktorów reprezentowalnych na $\mathcal{A}$:

$$\mathcal{E}(F) \xrightarrow{P} \mathcal{A} \xrightarrow{h_{\mathcal{A}}} \hat{\mathcal{A}}.$$

Pokazać, że

$$colim_{\mathcal{E}(F)}(h_{\mathcal{A}} \circ P) = F.$$

Zatem każdy funktor kontrawariantny określony na małej kategorii jest granicą prostą funktorów reprezentowalnych.

2 Kategorie addytywne i abelowe. Kompleksy łańcuchowe.

2.1. Niech $\mathcal{C}$ będzie kategorią addytywną, a $\mathcal{C}h(\mathcal{C})$ będzie kategorią kompleksów łańcuchowych. Dla przekształcenia łańcuchowego kompleksów łańcuchowych $f : X^\bullet \to Y^\bullet$ definiujemy jego stożek $C(f)^\bullet$:

$$C(f)^n = X^{n+1} \oplus Y^n \qquad\qquad d^n = \begin{pmatrix} -d_X^{n+1} & 0 \\ f^{n+1} & d_Y^n \end{pmatrix}$$

1. Pokazać, że jeżeli $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ jest funktorem addytywnym, to $F(C(f)) = C(F(f))$.

2. Pokazać, że istnieją naturalne przekształcenia łańcuchowe

$$Y^\bullet \xrightarrow{\alpha(f)} C(f)^\bullet \xrightarrow{\beta(f)} X[1]^\bullet .$$

3. Niech $f, g : X^\bullet \to Y^\bullet$ będą przekształceniami łańcuchowymi. Pokazać, że f i g są łańcuchowo homotopijne wtedy i tylko wtedy gdy istnieje przemienny diagram w $Ch(\mathcal{C})$:

$$\begin{tikzcd} Y^\bullet \arrow[r, "\alpha(f)"] \arrow[d, equal] & C(f)^\bullet \arrow[r, "\beta(f)"] \arrow[d, "u"] & X[1]^\bullet \arrow[d, equal] \\ Y^\bullet \arrow[r, "\alpha(g)"] & C(g)^\bullet \arrow[r, "\beta(g)"] & X[1]^\bullet \end{tikzcd}$$

Pokazać,że wówczas morfizm u jest izomorfizmem.

2.2. Niech $\mathcal{I}$ będzie kategorią filtrującą, a $\mathcal{A}$ kategorią abelową. Niech $F_i : \mathcal{I} \to \mathcal{A}$, $i = 1, 2, 3$ będą funktorami, dla których istnieje dokładny ciąg

$$F_1 \to F_2 \to F_3.$$

1. Pokazać, że dokładny jest ciąg

$$\operatorname{colim}_{\mathcal{I}} F_1 \to \operatorname{colim}_{\mathcal{I}} F_2 \to \operatorname{colim}_{\mathcal{I}} F_3.$$

2. Niech $F : \mathcal{I} \to \mathcal{C}\langle(\mathcal{A})$ będzie funktorem do kategorii kompleksów łańcuchowych na kategorii $\mathcal{A}$. Niech H_* będzie funktorem homologii. Pokazać, że naturalna transformacja

$$\operatorname{colim}_{\mathcal{I}} H_* F \to H_* \operatorname{colim}_{\mathcal{I}} F$$

jest izomorfizmem.

3. Podać przykład, że dla dowolnej kategorii $\mathcal{I}$ tezy obu punktów 1 i 2 nie są prawdziwe.

3 Funktory pochodne

3.1. Niech $\mathcal{C}$, będzie kategorią abelową, w której jest dostatecznie wiele obiektów injektywnych i niech $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ będzie funktorem lewodokładnym w kategorię abelową $\mathcal{C}'$.

Definicja. *Obiekt A kategorii $\mathcal{C}$ nazywamy F acyklicznym, jeżeli $R^i F(A) = 0$ dla $i > 0$.*

Niech X będzie obiektem $\mathcal{C}$ i niech

$$0 \longrightarrow X \longrightarrow A_0 \xrightarrow{g_0} A_1 \xrightarrow{g_1} A_2 \xrightarrow{g_2} \dots$$

będzie rezolwentą acykliczną. Rozpatrzmy kompleks

$$0 \longrightarrow F(A_0) \xrightarrow{Fg_0} F(A_1) \xrightarrow{Fg_1} F(A_2) \xrightarrow{Fg_2} \dots .$$

Pokazać, że $R^n(X) = H^n(F(A)^\bullet)$.

3.2. Niech $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ i $G : \mathcal{C}' \to \mathcal{C}''$ będą lewodokładnymi funktorami między kategoriami abelowymi. Załóżmy, że kategorie $\mathcal{C}$ i $\mathcal{C}'$ mają dostatecznie dużo obiektów injektywnych. Pokazać, że

1. Jeżeli G jest funktorem dokładnym, to $R^j(G \circ F) \simeq G \circ R^j(F)$.

2. Jeżeli F jest funktorem dokładnym, to istnieje naturalny morfizm $R^j(G \circ F) \to R^j(G) \circ F$. Podać przykład, że ta transformacja nie zawsze jest izomorfizmem.

3. Załóżmy, że funktor F przeprowadza injektywne obiekty kategorii $\mathcal{C}$ w acykliczne obiekty kategorii $\mathcal{C}''$. Pokazać, że jeżeli obiekt $X \in \mathcal{C}$ jest F acykliczny, to $R^j(G \circ F)(X) \cong R^j(G)(F(X))$.

3.3. Udowodnić twierdzenie:

Twierdzenie 1. *Niech R będzie dziedziną ideałów głównych. Niech M będzie R modułem, a (C_*, ∂) wolnym nieujemnym kompleksem łańcuchowym nad R. Wówczas dokładny jest następujący ciąg:*

$$0 \to \mathrm{Ext}^1_R(H_{q-1}(C_*), M) \to H^q(C_*; M) \to \mathrm{Hom}(H_q(C_*), M) \to 0$$

jest dokładny i naturalny ze względu na odwzorowania łańcuchowe kompleksów łańcuchowych. Ponadto ciąg ten rozszczepia się, ale rozszczepienie nie jest naturalne.

3.4. Niech $f, g : C_* \to D_*$ będą przekształceniami łańcuchowym wolnych nieujemnych kompleksów grup abelowych.

1. Pokazać, że jeżeli f indukuje izomorfizm grup kohomologii o współczynnikach całkowitych $\mathbb{Z}$, to f indukuje izomorfizm kohomologii o współczynnikach w dowolnej grupie abelowej G
2. Przypuśćmy, że $f^* = g^* : H^*(C_*, \mathbb{Z}) \to H^*(D_*, \mathbb{Z})$. Czy wynika z tego, że dla każdej grupy abelowej G, $f^* = g^* : H^*(C_*, G) \to H^*(D_*, G)$?

.

4 Zbiory symplicjane i ich realizacje

4.1. Dane dwa funktory $F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ i ich transformacja $F \to G$. Pokazać, że indukowane przekształcenia realizacji nerwów $|NF|, |NG| : |N\mathcal{C}| \to |N\mathcal{D}|$ są homotopijne. Wywnioskować, że jeśli kategoria $\mathcal{C}$ ma obiekt początkowy lub końcowy, to $|N\mathcal{C}|$ jest ściągalna.

4.2. Niech $R : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ i $L : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ będą funktorami dołączonymi. Pokazać, że przestrzenie $|N\mathcal{C}|$ i $|N\mathcal{D}|$ są homotopijnie równoważne.

4.3. Niech G będzie grupą. Definiujemy dwie kategorie $\mathcal{G}$ i $\tilde{\mathcal{G}}$. Kategoria $\mathcal{G}$ ma jeden obiekt $\star$, a morfizmami są elementy G z mnożeniem jako operacją składania. Obiektami kategorii $\tilde{\mathcal{G}}$ są elementy G i między dowolnymi dwoma obiektami x i y istnieje dokładnie jeden morfizm $x \to y$, oznaczany jako para (y, x). Niech $EG = |N\tilde{\mathcal{G}}|$ i $BG = |N\mathcal{G}|$.

1. Pokazać, że przestrzeń EG jest ściągalna.
2. Zbiór G symplicjalny to obiekt symplicjalny w kategorii G zbiorów. Pokazać, że $N(\tilde{\mathcal{G}})$ jest G zbiorem symplicjalnym i że działanie G jest wolne dla każdego $N(\tilde{\mathcal{G}})_n$.
3. Udowodnić, że zbiory symplicjalne $N(\tilde{\mathcal{G}})/G$ i $N(\mathcal{G})$ są izomorficzne.
4. Udowodnić, że dla dowolnego zbioru G symplicjalnego X mamy indukowane działanie G na $|X|$ i naturalny homeomorfizm $|X/G| \cong |X|/G$. Wywnioskować, że $EG/G \cong BG$ i $EG \longrightarrow BG$ jest nakrycien uniwersalnym.

5. Pokazać, że funktor $F : \tilde{\mathcal{G}} \longrightarrow \mathcal{G}$, $x \to \star$ i $(y, x) \to y^{-1}x$ indukuje $EG \longrightarrow BG$ tożsame z $EG \longrightarrow EG/G = BG$

6. $E\mathbb{Z}_2 = S^\infty$ z antypodycznym działaniem $\mathbb{Z}_2$ i $B\mathbb{Z}_2 = \mathbb{R}P^\infty$.

4.4. Niech A będzie symplicjalną grupą abelową, czyli funktorem $\triangle^{op} \to \mathcal{A}\lfloor$. Niech $C(A)$ będzie kompleksem łańcuchowym :

$$C(A)_n = \begin{cases} A([n]) \,\text{dla}\, n \geq 0 \\ 0 \,\text{dla}\, n < 0 \end{cases} \qquad \partial_n : C_n(A) \to C_{n-1}(A), \qquad \partial_n = \sum_{k=0}^{=} (-1)^k d_k.$$

Niech $D_n(A) \leqslant C_n(A)$ będzie podgrupą generowaną przez sympleksy zdegenerowane. Pokazać, że

a) $D_n(A)$ jest podkompleksem łańcuchowym;

b) odwzorowanie ilorazowe $C(A) \to N(A)$, gdzie $N(A) = C(A)/D(A)$ jest kompleksem ilorazowym, jest łańcuchową homotopijną równoważnością.

4.5. Niech $F : \mathcal{C} \to \mathcal{S}et$ będzie funktorem. Zdefiniujemy zbiór symplicjalny BF:

$$BF_n = \coprod_{\sigma \in N(\mathcal{C})_n} F(\sigma(0))$$

Definiujemy operatory :$s_i : BF_n \to BF_{n+1}$ oraz $d_i : BF_n \to BF_{n-1}$:

$$s_i(F(\sigma(0))) = F(s_i(\sigma)(0)) \qquad d_i(F(\sigma(0))) = \begin{cases} F(\sigma(0)) & \text{dla } i > 0, \\ F(\alpha_1)(F(\sigma(0))) & \text{dla } i = 0 \text{ i } \alpha_1 : \sigma(0) \to \sigma(1). \end{cases}$$

1. Zdefiniować przekształcenie zbiorów symplicjalnych: $BF \to N\mathcal{C}$.

2. Opisać konstrukcję dla $X : \Delta^{op} \to \mathcal{S}et$ i znaleźć $|BX|$.

3. Opisać konstrukcję dla $X : \mathcal{G} \to \mathcal{S}et$, gdzie $\mathcal{G}$ jest kategorią o jednym obiekcie wyznaczoną przez grupę G. Opisać $|BX| \to |N(\mathcal{G})|$. (tylko dla tych, którzy chodzili na topologię II)

5 Presnopy i snopy

5.1. Niech $i_s : S \to X$ będzie włożeniem podzbioru domkniętego. Pokazać, że funktor obrazu prostego snopa $i_{S*} : Sh(S) \to Sh(X)$ na kategorii snopów R - modułów jest dokładny.

5.2. Niech $i_U : U \to X$ będzie włożeniem podzbioru otwartego. Niech F będzie snopem na X. Rozważmy snop $i_{U*}{i_U}^*(F)$. Pokazać, że jego źdźbło jest równe

$$i_{U*}{i_U}^*(F)_x = colim_{x \in V} \Gamma(U \cap V; F),$$

gdzie granica prosta jest wzięta po wszystkich otwartych otoczeniach x.

5.3.

Definicja. *Snop F nazywa się stały, jeżeli jest usnopieniem presnopa stałego.*

Niech $X = U_1 \cup U_2$, U_1, U_2 otwarte i $U_1 \cap U_2$ jest niepuste i spójne. Niech F będzie snopem na X takim, że $F_{|_{U_i}}$, $i = 1, 2$ jest snopem stałym. Pokazać, że F jest snopem stałym.

5.4.

Definicja. *Niech F i G będą presnopami na X lewych i prawych R modułów odpowiednio. Iloczynem tensorowym presnopów nazywamy presnop $F \otimes_R^{Psh} G$: $F \otimes_R^{Psh} G(U) = F(U) \otimes_R^{Psh} G(U)$.Jeżeli F i G są snopami, to iloczynem tensorowym snopów jest usnopienie presnopa $F \otimes_R^{Psh} G$, czyli $F \otimes_R G = (F \otimes_R^{Psh} G)^a$.*

1. Podać przykład snopów, dla których $F \otimes_R^{Psh} G$ nie jest snopem.
2. NIech $f : X \to Y$ będzie przekształceniem ciagłym. Niech F i G będą snopami na Y. Pokazać, że istnieje naturalny izomorfizm

$$f^*(F \otimes_R G) \cong f^*(F) \otimes_R f^*(G).$$

5.5. Niech S będzie przestrzenią dyskretną. Niech $p : X \times S \to X$ będzie rzutowaniem. Niech F będzie snopem na $X \times S$ i niech $F_s = i_s^*(F)$, gdzie $i_s : X \times \{s\}$ włożenie. Pokazać, że $p_*(F) \cong \prod_{s \in S} F_s$.

5.6. Niech F będzie presnopem na Y a $f : X \to Y$ przekształceniem ciągłym. Pokazać, że $(f^+(G))^a = f^*(G^a)$.

5.7. Niech $i : Sh(X) \to PSh(X)$ będzie włożeniem kategorii snopów na X w kategorie presnopów na X. Pokazać,że jest ono funktorem lewodokładnym. Znaleźć jego prawe funktory pochodne.