Topologia Algebraiczna

30 zadań na Egzamin z Topologii Algebraicznej I

Semestr zimowy roku akademickiego 2015/16

Agnieszka Bojanowska

20 stycznia 2016

1 Kategorie i funktory.

Zad. 1. Zbadać zachowywanie granic prostych i odwrotnych przez następujące funktory:

1. Funktor zapominania z kategorii zbiorów punktowanych do kategorii zbiorów;
2. Funktor włożenia kategorii grup abelowych w kategorię wszystkich grup
3. Funktor $\mathrm{Hom}(-,\mathbf{W})\colon Vect \to Vect$ oraz $\mathrm{Hom}(\mathbf{V},-)\colon Vect^{op} \to Vect$ gdzie Vect jest kategorią skończenie wymiarowych przestrzeni wektorowych nad ciałem $\mathbb{F}$.

Zad. 2. Zbadać, czy w kategorii homotopii przestrzeni topologicznych istnieją produkty i koprodukty.

Zad. 3. Niech $G-Set$ będzie kategorią G-zbiorów, a $H \subset G$ będzie podgrupą. Zbadać, czy funktor zapominania $G-Set \to H-Set$ posiada funktory dołączone z prawej i lewej strony.

Zad. 4. Czy funktor $\Delta : \mathcal{T}op \to \mathcal{T}op^2$, $\Delta(A) = (A, A)$ ma funktory dołączone z prawej i lewej strony?

Zad. 5. Niech diagram

$$X \xrightarrow{i} E \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} B$$

będzie ekwalizatorem w kategorii $\mathcal{C}$. Czy jest to równoważne stwierdzeniu, że diagram

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "i"] \arrow[d, "i"'] & E \arrow[d, "f"] \\ E \arrow[r, "g"] & B \end{tikzcd}$$

jest pullbackiem w kategorii $\mathcal{C}$?

Zad. 6. Przestrzeń punktowaną X nazywany H przestrzenią, jeżeli istnieje odwzorowanie $\mu : X \times X \to X$, takie, że następujący diagram jest przemienny w $\mathcal{T}op_{h*}$.

$$\begin{tikzcd} X \vee X \arrow[r, "\nabla"] \arrow[d] & X , \\ X \times X \arrow[ur, "\mu"'] & \end{tikzcd}$$

gdzie ∇ jest identycznością na każdym składniku, zaś $X \vee X \to X \times X$ jest kanonicznym włożeniem w produkt.

1. Pokazać,że jeżeli X jest retraktem w $\mathcal{T}op_{h*}$ H - przestrzeni Y, to X jest H- przestrzenią.
2. Pokazać, że X jest H- przestrzenią wtedy i tylko wtedy gdy dla dowolnych przestrzeni punktowanych A, B i dowolnych $f : A \to X$ i $g : B \to X$ w poniższym diagramie istnieje przerywana strzałka, która czyni go przemiennym w $\mathcal{T}op_{h*}$.

$$\begin{tikzcd} A \vee B \arrow[r, "f \vee g"] \arrow[d] & X , \\ A \times B \arrow[ur, dotted] & \end{tikzcd}$$

3. Zdefiniować ko-H przestrzeń i udowodnić analogiczne do powyższych własności.

Zad. 7. Niech $(X, *)$ będzie punktowaną przestrzenią. Niech $map([0, +\infty), X)$ będzie rozpatrywane z topologia zwarto – otwartą. Niech $\Omega_M(X, *) \subset map([0, +\infty), X) \times [0, +\infty)$, $\Omega_M(X, *) = \{(f, r) \colon f(t) = * \text{ dla } t \geqslant r\}$. $\Omega_M(X, *)$ nazywamy przestrzenią pętli Moore'a.

a) Zauważyć, że $\Omega(X, *) = \{(f, 1) \in \Omega_M(X, *)\}$. Pokazać, że $\Omega(X, *)$ jest retraktem deformacyjnym $\Omega_M(X, *)$.

b) Pokazać, że $\Omega_M(X, *)$ z działaniem $(f, r) \cdot (g, t) = (f * g, r + t)$, gdzie $f * g(s) = \begin{cases} f(s) \text{ dla } s \leqslant r \\ g(s - r) \text{ dla } s \geqslant r \end{cases}$ jest topologicznym monoidem (to znaczy działanie jest łączne i ma element neutralny).

c) Czy retrakcja skonstruowana w punkcie a) jest przekształceniem H – przestrzeni?

2 Rozwłóknienia i korozwłóknienia

Zad. 8. Przykłady rozwłóknień lub korozwłóknień:

1. Niech $X := \{x \in \mathbb{R} \,|\, x = 0 \,\text{lub}\, x = \frac{1}{n}, \text{dla}\, n \in \mathbb{N}\}$ i rozważmy stożek $C(X)$. Dla których punktów $[x, t] \in C(X)$ włożenie $[x, t] \hookrightarrow C(X)$ jest korozwłóknieniem?
2. Dla jakich przestrzeni X projekcja stożka $p \colon C(X) \to [0, 1]$, $p([x, t] := t$ jest rozwłóknieniem?
3. W przestrzeniach euklidesowych $\mathbb{R}^n$ dla $n = 2, 4, 8$ istnieje struktura multyplikatywna zadana odpowiednio przez mnożenie liczb zespolonych, kwaternionów i oktonionów, które zachowują sfery $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$. Zbadać, czy przekształcenie $p_2 \colon S^{n-1} \to S^{n-1}$, $p_2(x) = x^2$ jest rozwłóknieniem.

4. Niech $S^2 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ będzie sferą Riemanna. Czy odwzorowanie $p\colon S^3 \to S^2$ dane wzorem $p(z_1, z_2) := -\frac{\bar{z}_1}{z_2}$ jest rozwłóknieniem? Jakie jest jego włókno?

5. Dla jakich dyskretnych podzbiorów $\{x_1, \dots x_n, \dots\} \subset \mathbb{R}$ odwzorowanie $\mathrm{Map}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \to \prod_{i=1}^{\infty} \mathbb{R}$ dane wzorem $p(f) := (f(x_1), \dots f(x_n), \dots)$ jest rozwłóknieniem?

Zad. 9. Niech (X, x_0) będzie dobrze punktowaną H-przestrzenią, to znaczy istnieje odwzorowanie $\mu : X \times X \to X$, takie, że następujący diagram jest przemienny w $\mathcal{T}op_{h*}$.

$$\begin{tikzcd} X \vee X \arrow[r, "\nabla"] \arrow[d] & X \\ X \times X \arrow[ur, "\mu"'] & \end{tikzcd},$$

gdzie ∇ jest identycznością na każdym składniku, zaś $X \vee X \to X \times X$ jest kanonicznym włożeniem w produkt.
Czy istnieje odwzorowanie μ' homotopijne z μ, dla którego diagram

$$\begin{tikzcd} X \vee X \arrow[r, "\nabla"] \arrow[d] & X \\ X \times X \arrow[ur, "\mu'"'] & \end{tikzcd}$$

jest przemienny w $\mathcal{T}op_*$ (to znaczy "na nos").

Zad. 10. Niech $S^3 \to S^2$ będzie rozwłóknieniem Hopfa. Znaleźć jego kowłókno.

Zad. 11. Jeśli $p\colon E \to B$ jest rozwłóknieniem z włóknem F, to dla dowolnej przestrzeni lokalnie zwartej X odwzorowanie indukowane $p_*\colon \mathrm{Map}\,(X, E) \to \mathrm{Map}\,(X, B)$ jest rozwłóknieniem. Zbadać jego włókna nad różnymi punktami. Wykazać, że $\Omega p : \Omega E \to \Omega B$ jest rozwłóknieniem.

Zad. 12. Wykazać, że homotopijne włókno włożenia $S^2 = \mathbb{C}P(1) \subset \mathbb{C}P^\infty$ jest homotopijnie równoważne ze sferą S^3. Czym jest homotopijne włókno włożenia $S^1 = \mathbb{R}P(1) \subset \mathbb{R}P^\infty$?

Zad. 13. Udowodnić, że homotopijne przekształcenia maję homotopijnie równoważne homotopijne włókna i homotopijne kowłókna. Włókna homotopijne i kowłókno homotopijne odwzorowania, które jest homotopijną równoważnością sę ściągalne. A jakie są homotopijne włókna i kowłókna przekształceń ściągalnych?

Zad. 14. Niech $E \to B$ będzie rozwłóknieniem z włóknem F, gdzie B i F są łukowo spójne. Skonstruować działanie $\pi_1(E)$ na $\pi_n(F)$. Podać przykład rozwłóknienia dla którego E jest przestrzenią prostą, ale F nie.

Zad. 15. Niech $F \to E \to B$ będzie rozwłóknieniem. Jeśli włożenie $F \to E$ jest homotopijne z przekształceniem stałym, to dla każdego $n > 1$ istnieją krótkie *rozszczepialne* ciągi dokładne

$$0 \to \pi_n(E) \to \pi_n(B) \to \pi_{n-1}(F) \to 0.$$

W szczególności $\pi_n(B) \cong \pi_n(E) \times \pi_{n-1}(F)$ oraz $\pi_1(F)$ jest abelowa. Czy odp. fakt ma miejsce dla kowariantnego ciągu Puppe jeśli zastąpić sferę dowolną przestrzenią?

3 Grupy homotopii. CW-kompleksy

Zad. 16. Opisać strukturę CW-kompleksu w znanych powierzchniach 2-wymiarowych (sfera, torus, precle, butelka Kleina itd.) Wykazać, że zawieszenie ΣP_g, gdzie P_g jest preclem genusu g (sfera z g uchami), jest homotopijnie równoważne z bukietem $2g$ egzemplarzy sfer S^2 i sfery S^3. Zbadać z jaką przestrzenią jest homotopijnie równoważne zawieszenie butelki Kleina.

Zad. 17. Opisać strukturę CW-kompleksu w przestrzeniach rzutowych nad ciałami $\mathbb{F} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$. Które z przestrzeni $\mathbb{F}P(n)$ dla $n = 1, 2 \ldots \infty$ są przestrzeniami Eilenberga-Maclane'a?

Zad. 18. Dla każdego $n \in \mathbb{N}$ rozważmy strukture CW kompleksu na sferze S^n z jedną komórką w wymiarze 0 i jedna komórką w wymiarze n. Wówczas produkt $S^p \times S^q$ ma cztery komórki w wymiarach 0, p, q i $p+q$. Niech $S^{p+q-1} \to S^p \vee S^q$ będzie odwzorowanem przyklejającym komórkę wymiaru $p + q$. Indukuje ono:

$$\pi_p(X, x_0) \times \pi_q(X, x_0) \to \pi_{p+q-1}(X, x_0)$$

zwane produktem Whiteheada.

a) Opisać produkt Whiteheada jeżeli $p = q = 1$.

b) Opisać produkt Whiteheada jeżeli $p = 1$ a q jest dowolne.

c) Pokazać, że jeżeli X jest H przestrzenią, to produkt Whiteheada jest trywialny.

Zad. 19. Niech X będzie p – spójnym a Y q – spójnym CW kompleksem, $p, q \geqslant 2$. Pokazać, że

$$\pi_i(X \vee Y) = \pi_i(X) \oplus \pi_i(Y) \text{ dla } i \leqslant p + q - 1.$$

Zad. 20. (Hatcher) Pokazać,że CW kompleks X jest ściągalny wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $n \in N \cup \{0\}$ włożenie $X^{(n)} \hookrightarrow X^{(n+1)}$ jest ściągalne. Wywnioskować,że dla każdego CW kompleksu X nieskończone zawieszenie niezredukowane $\Sigma^\infty X$ jest przestrzenią ściągalną.

Zad. 21. Niech X będzie takim spójnym CW kompleksem, że $\pi_4(X) = \pi_7(X) = \mathbb{Z}_2$ oraz $\pi_k(X) = 0$ dla pozostałych k. Wynika z tego, że

a) 3-szkielet $X^{(3)}$ jest przestrzenią ściągalną

b) $X^{(6)} = X^{(5)}$

c) $\pi_4(X) = \pi_4(X^{(5)})$

d) X ma co najmniej jedną komórkę czterowymiarową

e) X jest homotopijnie równoważny z CW kompleksem skończenie wymiarowym

f) X jest homotopijnie równoważny z CW kompleksem o skończonej liczbie komórek

g) dowolne odwzorowanie $S^2 \times S^1 \to X$ jest homotopijne z odwzorowaniem w punkt

4 Klasyfikacja homotopijna przekształceń

Zad. 22. Niech $\mathbb{F} = \mathbb{C}, \mathbb{H}, \mathbb{O}$. Oblicz stopień przekształcenia k-tej potęgi $f_k : S^{\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{F}-1} \to S^{\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{F}-1}$, $f_k(z) := z^k$.

Zad. 23. Analizując rozwłóknienia Hopfa wykaż następujące izomorfizmy grup homotopii sfer:

1. $\pi_2(S^2) \simeq \mathbb{Z}$
2. $\pi_i(S^3) \simeq \pi_n(S^2)$ dla $i \geqslant 3$, w szczególności $\pi_3(S^2) = \mathbb{Z}$ (wskazać generator $\pi_3(S^2)$)
3. $\pi_i(S^4) \simeq \pi_i(S^7) \oplus \pi_{i-1}(S^3)$ dla $i \geqslant 2$,
4. $\pi_i(S^8) \simeq \pi_i(S^{15}) \oplus \pi_{i-1}(S^7)$ dla $i \geqslant 2$.

Wywnioskuj stąd, że wiązki Hopfa nie są homotopijne z odwzorowaniami stałymi.

Zad. 24. Korzystając z klasyfikacji topologicznej zamkniętych (zwartych i spójnych) powierzchni 2-wymiarowych (orientowalnych i nieorientowalnych) pokazać, że powierzchnia jest przestrzenią Eilenberga–MacLane'a typu $K(\pi, 1)$ wtedy i tylko wtedy, gdy jest różna od sfery S^2 i płaszczyzny rzutowej $\mathbb{R}P(2)$. Opisać grupy podstawowe powierzchni i ich abelianizację. Obliczyć grupę klas homotopii odwzorowań $[S, T^n]$, gdzie $T^n := (S^1)^n$ jest n-wymiarowym torusem (a więc grupę topologiczną), a S dowolnę powierzchnię. Wskazać jej generatory.

Wsk. Skorzystaj z ciagu Puppe dla włożenia bukietu okręgów w powierzchnię.

Zad. 25. Obliczyć grupę klas homotopii odwzorowań $[\Sigma(S^1 \times S^1), S^2]_*$ z działaniem wyznaczonym przez strukturę H-ko-grupy na zawieszeniu.

Zad. 26. Podać klasyfikację odwzorowań $[S^2 \times \mathbb{C}P(k), \mathbb{C}P(\infty)]$ dla $k = 1, 2, \dots \infty$.

Zad. 27. (Hatcher) Dla łukowo spójnych przestrzeni punktowanych rozważmy przekształcenie zbiorów $[(X, x_0), (Y, y_0)]_* \to \mathrm{Hom}(\pi_n(X, x_0), \pi_n(Y, y_0))$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$.

a) Opisać działanie $\pi_1(Y, y_0)$ na obu zbiorach. Pokazać, że przekształcenie jest $\pi_1(Y, y_0)$ ekwiwariantne.

b) Udowodnić, że $[(X, x_0), K(\pi, 1)]$ jest w bijekcji ze zbiorem $\mathrm{Hom}(\pi_1(X, x_0), \pi)/\,\mathrm{Inn}(\pi)$.

Zad. 28. Dla każdego n istnieje izomorfizm $\pi_n(S^2) \cong \pi_n(S^3 \times \mathbb{C}P^\infty)$. Udowodnij, że S^2 nie jest homotopijnie równoważne $S^3 \times \mathbb{C}P^\infty$. Czy ten przykład przeczy twierdzeniu Whiteheada?

Zad. 29. Z obliczeń grup homotopii sfer wywnioskować tw. Brouwera: każde odwzorowanie $f\colon D^n \to D^n$ ma punkt stały i twierdzenie Borsuka – Ulama powiadajęce, że dla dowolnego $f\colon S^n \to \mathbb{R}^n$ istnieje punkt $p_0 \in S^n$ taki, że $f(p_0) = f(-p_0)$.

Wsk. Przy pomocy odwzorowania f zdefiniować odwzorowanie $g\colon S^n \to S^{n-1}$ takie, że $g(-p) = -g(p)$ i wykazać, że jego obcięcie do sfery $S^{n-1} \subset S^n$ ma nieparzysty stopień, co przeczy mozliwości rozszerzenia na S^n.

Zad. 30. Udowodnić, że przestrzeń $E(n, \mathbb{R}^2) = \{(x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}^2)^n\colon\ x_i \neq x_j \text{ dla } i \neq j\ \}$ jest przestrzenią typu $K(\pi, 1)$.
Pokazać, że istnieje naturalne działanie grupy permutacji Σ_n na przestrzeni $E(n, \mathbb{R}^2)$. Udowodnić, że przestrzeń orbit $E(n, \mathbb{R}^2)/\Sigma_n$ jest także przestrzenią typu $K(\pi, 1)$. W tym przypadku grupę π nazywamy grupą warkoczy o n-pasmach.

Zad. 31. Niech $E \to X$ oraz $E' \to X$ będą rozwłóknieniami, przy czym X jest łukowo spójna, zaś E i E' mają typ homotopii CW kompleksów. Niech $f : E \to E'$ będzie przekształceniem włóknistym. Pokazać, że jeśli f jest słabą równoważnością w obcięciu do pewnych włókien, to f jest włóknistą homotopijną równoważnością.