Spis treści

1 Teoria Homologii i Kohomologii **3**
1.1 Aksjomaty Eilenberga Steenroda 3
1.2 Homologie relatywne. Para Borsuka. 3
1.3 Ciąg trójki i ciąg Mayera - Vietoroisa 3
1.3.1 Ciąg trójki 3
1.3.2 Ciąg Mayera - Vietorisa. Pary wycinajace 3

2 Metoda Modeli Acyklicznych **5**
2.1 Obiekty wolne w kategorii funktorów 5
2.1.1 Funktor dołączony Kana 5
2.1.2 Funktory wolne 6
2.2 Twierdzenie o modelach acyklicznych 7
2.3 Aksjomaty Eilenberga Steenroda dla Homologii i Kohomologii Singularnch 11
2.3.1 Aksjomat Homotopii 11
2.3.2 Aksjomat Wycinania 11
2.4 Twierdzenie Eilenberga Silbera 11
2.5 Twierdzenie Künnetha 11
2.5.1 Twierdzenie o współczynnikach uniwersalnych 11

3 CW kompleksy **13**
3.1 Definicja i własnosci CW kompleksów 13
3.2 Homologie komórkowe 13

4 Struktura multyplikatywna **15**
4.1 Iloczyn tensorowy z gradacją 15
4.2 Algebry z gradacją 15
4.3 Mnożenia i dzielenia - sytuacja algebraiczna 18
4.4 Produkty w (ko-)homologiach przestrzeni topologicznych . . . 19

5 Teoria homotopii **21**
5.1 Korozwłóknienia i rozwłóknienia 21
5.1.1 Walce i ko-walce 21
5.1.2 Retrakcje 22

5.1.3 Korozwłóknienia i rozwłóknienia 22
5.1.4 Lokalny opis korozwłóknień i rozwłóknień 28
5.1.5 Relatywne homotopijne równoważności i włókniste homotopijne równoważności 30
5.1.6 Korozwłóknienia, rozwłóknienia i homotopijne równoważności 36

Rozdział 1

Teoria Homologii i Kohomologii

1.1 Aksjomaty Eilenberga Steenroda

1.2 Homologie relatywne. Para Borsuka.

1.3 Ciąg trójki i ciąg Mayera - Vietoroisa

1.3.1 Ciąg trójki

1.3.2 Ciąg Mayera - Vietorisa. Pary wycinajace

Rozdział 2

Metoda Modeli Acyklicznych

2.1 Obiekty wolne w kategorii funktorów

2.1.1 Funktor dołączony Kana

Niech $\mathcal{C}$ będzie dowolną kategorią, natomiast $\mathcal{A}$ kategorią w której istnieją granice proste dowolnych diagramów. Njaczęściej $\mathcal{A}$ będzie kategorią zbiorów lub kategorią R-modułów. Będziemy rozpatrywać kategorię funktorów $\mathrm{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{A})$ z kategorii $\mathcal{C}$ do kategorii
sA, której obiektami są funktory $\mathcal{C} \to \mathcal{A}$, a morfizmami ich transformacje naturalne. Jeśli $F, G \colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ są dwoma funktorami, to przez $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(F, G)$ oznaczamy zbiór transformacji naturalnych $F \to G$, czyli morfizmów w kategorii funktorów $\mathrm{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{A})$.

Niech $\mathcal{C}' < \mathcal{C}$ będzie podkategorią. Wykażemy, że funktor obcięcia $\mathrm{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{A}) \to \mathrm{Fun}(\mathcal{C}', \mathcal{A})$ posiada lewy funktor dołączony, zwany lewym rozszerzeniem Kana.

Twierdzenie 1. *Niech $\mathcal{C}$ będzie dowolną kategorią a $\mathcal{C}' < \mathcal{C}$ jej małą podkategorią. Funktor obcięcia $\mathrm{res}^{\mathcal{C}}_{\mathcal{C}'} \colon \mathrm{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{A}) \to \mathrm{Fun}(\mathcal{C}', \mathcal{A})$ posiada lewy funktor dołączony tzn. istnieje funktor $\mathrm{ind}^{\mathcal{C}}_{\mathcal{C}'} \colon \mathrm{Fun}(\mathcal{C}', \mathcal{A}) \to \mathrm{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{A})$ oraz naturalna równoważność funktorów $\mathcal{C}'^{op} \times \mathcal{C} \to \mathcal{S}$⌉⊔:*

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathrm{ind}\, F, G) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}(F, \mathrm{res}\, G).$$

gdzie $F \colon \mathcal{C}' \to \mathcal{A}$ oraz $G \colon \mathcal{C} \to \mathcal{A}$

Dowód. Dla dowolnego obiektu $C \in \mathrm{ob}\, \mathcal{C}$ definujemy kategorię $\mathcal{C}'/C$ ktorej obiektami są morfizmy $C' \to C$ a morfizmami morfizmy w $\mathcal{C}'$, dla których odpowiednie diagramy są przemienne. Istnieje oczywisty funktor zapominania $\mathcal{C}'/C \to \mathcal{C}'$.

Dla funktora $F \colon \mathcal{C}' \to \mathcal{A}$ definiujemy funktor $\mathrm{ind}\, F \colon \mathcal{C} \to \mathcal{A}$:

$$\mathrm{ind}\, F(C) := \mathrm{colim}_{\mathcal{C}'/C} \bar{F}.$$

gdzie $\bar{F}(C' \to C) := F(C')$. Wskażemy naturalną bijekcję $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}(F, \mathrm{res}\, G) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathrm{ind}\, F, G)$. Niech $\Phi' \colon F \to \mathrm{res}\, G$ oraz $C \in \mathrm{ob}\, \mathcal{C}$. Dla dwolnego $C \in \mathrm{ob}\, \mathcal{C}$ zadajemy $\Phi \colon (\mathrm{ind}\, F)(C) \to G(C)$ korzystając z defincij i granicy prostej. Łatwo skonstruować odwrotne przyporządkowanie. □

Zauważmy, że przyjmując $G := \mathrm{ind}\, F$ otrzymujemy transformację $j \colon F \to \mathrm{res}\,\mathrm{ind}\, F$, odpowiadającą identyczności $\mathrm{ind}\, F \to \mathrm{ind}\, F$. Dla dowolnego funktora $K \colon \mathcal{C} \to \mathcal{A}$ i transformacji $T : F \to \mathrm{res}\, K$ zachodzi równość $T = \hat{T} \circ j$ gdzie $\hat{T} \colon \mathrm{ind}\, F \to K$, transformacja odpowiadająca $T \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}(F, \mathrm{res}\, K)$.

2.1.2 Funktory wolne

W przypadku ważnym dla dalszych zastosowań dowód istnienia lewego rozszerzenia Kana wygląda znacznie prościej. Będziemy rozważać sytuację w której $\mathcal{M}$ jest dyskretną małą podkategorią, a więc taką w której jedynymi morfizmami są identyczności, czyli po prostu podzbiór w klasie obiektów. Wtedy

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{M}}(\mathrm{res}\, F, G) = \coprod_{C' \in \mathcal{C}'} \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(F(C'), G(C')) \quad \text{oraz} \quad \mathrm{ind}\, F(C) := \coprod_{C' \to C} F(C').$$

Definicja 1. *Jeśli $\mathcal{M} < \mathcal{C}$ jest dyskretną podkategorią, to funktor $G \colon \mathcal{C} \to \mathrm{Mod}_R$ nazywamy* wolnym (odp. projektywnym), modelowanym na $\mathcal{M}$ *jeśli istnieje funktor $S \colon \mathcal{M} \to \mathrm{Mod}_R$ taki, że dla każdego $C \in \mathcal{M}$ R-moduł $S(C)$ jest wolny (odp. projektywny) oraz naturalna równoważność $\mathrm{ind}_{\mathcal{M}}^{\mathcal{C}} S \simeq G$.*

Zauważmy następujące własności klasy funktorów wolnych.

Stwierdzenie 1.

a) Jeśli funktor $G \colon \mathcal{C} \to \mathrm{Mod}_R$ jest wolny, modelowany na $\mathcal{M}$, to jest on modelowany na dowolnej dyskretnej podkategorii $\mathcal{M}' \supset \mathcal{M}$.

b) Jeśli $G \colon \mathcal{C} \to \mathrm{Mod}_R$ i $G' \colon \mathcal{C}' \to \mathrm{Mod}_R$ są funktorami wolnymi, modelowanymi odpowiednio na $\mathcal{M} < \mathcal{C}$ i $\mathcal{M}' < \mathcal{C}'$, to funktor $G \hat{\otimes} G' \colon \mathcal{C} \times \mathcal{C}' \to \mathrm{Mod}_R$ dany wzorem

$$(G \hat{\otimes} G')(C, C') := G(C) \otimes G'(C')$$

jest funktorem wolnym, modelowanym na $\mathcal{M} \times \mathcal{M}'$.

Dowód.
Ad a). Jeśli $G = \mathrm{ind}\, S$, to rozszerzamy S na $\mathcal{M}'$ kładąc $S(M') = 0$ dla $M' \in \mathcal{M}' \setminus \mathcal{M}$.
Ad b). Własności iloczynu tensorowego dowodzi następujący ciąg naturalnych izomorfizmów:

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C} \times \mathcal{C}'}(G \hat{\otimes} G', K) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(G, \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}(G', K)) =$$

$$= \mathrm{Hom}_{\mathcal{M}}(S, \mathrm{Hom}_{\mathcal{M}'}(S', \mathrm{res}\, K)) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{M} \times \mathcal{M}'}(S \hat{\otimes} S', \mathrm{res}\, K).$$

□

Przykład 1. *Niech $M \in \mathcal{C}$ będzie dowolnym obiektem. Funktor (kowariantny) będący złożeniem funktora reprezentowanego przez M oraz funktora wolnego R-modułu generowanego przez zbiór:* $\mathrm{ob}\,\mathcal{C} \ni C \mapsto R[\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(M, C)]$ *jest funktorem wolnym, modelowanym na kategorii z jednym obiektem i morfizmem $\mathcal{M} = M$, $G(M) = R$.*

2.2 Twierdzenie o modelach acyklicznych

Twierdzenie 2 (S. Eilenberg, S. MacLane[1])**.** *Niech $G, G' \colon \mathcal{C} \to \mathcal{CC}_R$ będą dwoma funktorami z kategorii $\mathcal{C}$ do kategorii kompleksów łańcuchowych nad pierścieniem R oraz $\mathcal{M} < \mathcal{C}$ jest dyskretną podkategorią. Załóżmy ponadto, że:*

1. *Dla każdego $q \in \mathbb{Z}$ funktor $G_q \colon \mathcal{C} \to \mathrm{Mod}_R$ jest wolny, modelowany na $\mathcal{M}$, oraz $G_q = 0$ dla $q < 0$;*
2. *Funktor $G' \colon \mathcal{M} \to \mathcal{CC}_R$ jest acykliczny w wymiarach dodatnich tzn. $H_q(G'(M)) = 0$ dla $M \in \mathcal{M}$, $q > 0$.*

Wtedy dowolna transformacja naturalna $\tau \colon H_0(G) \to H_0(G')$ jest indukowana przez transformację naturalną funktorów $T \colon G \to G'$ i dowolne dwie transformacje takie, że $H_0(T) = H_0(T')$ są naturalnie łańcuchowo homotopijne.

Dowód. Oznaczmy przez $S_i \colon \mathcal{M} \to \mathrm{Mod}_R$ funktory o wartościach w wolnych R-modułach takie, że $G_i = \mathrm{ind}_{\mathcal{M}}^{\mathcal{C}} S_i$. Skonstruujemy indukcyjnie transformację $T_i \colon G_i \to G'_i$ rozpoczynając od $i = 0$. Dla dowolnego $M \in \mathcal{M}$ rozważmy diagram:

$$\begin{tikzcd}
S_0(M) \arrow[d, "j"] \arrow[dr, dotted, "\tilde{\tau}_M"] & & \\
G_0(M) \arrow[d, "p"'] & Z_0(G'(M)) \arrow[r, "\subset"] \arrow[d, "p'"] & G'_0(M) \\
H_0(G(M)) \arrow[r, "\tau_M"] & H_0(G'(M)) &
\end{tikzcd}$$

w którym transformacja $j \colon S_0 \to G_0$ na $\mathcal{M}$ odpowiada trnsformacji identycznościowej $G_0 = G_0$ na $\mathcal{C}$, a
$Z_i(-) := \ker \partial_i$ oznacza moduł cykli i -wymiarowych. Ponieważ moduły

[1] Samuel Eilenberg and Saunders MacLane, *Acyclic Models* American Journal of Mathematics , Vol. 75, No. 1 (Jan., 1953), pp. 189-199 Article Stable URL: http://www.jstor.org/stable/2372628

$S_0(M)$ są wolne, a p' jest epimorfizmem, więc dla każdego $M \in \mathcal{M}$ istnieje homomorfizm $\tilde{\tau}\colon S_0(M) \to Z_0(G'(M))$, a więc transformacja naturalna $\tilde{\tau}\colon S_0 \to G'_0$. Ponieważ $G_0 = \operatorname{ind}_{\mathcal{M}}^{\mathcal{C}} S_0$ jest lewym rozszerzeniem Kana, a więc $\tilde{\tau}$ wyznacza dokładnie jedną transformację naturalną $T_0\colon G \to G'_0$ na $\mathcal{C}$. Korzystajac ponownie z dołączenia wnioskujemy, że diagram

$$\begin{tikzcd}
G_0(C) \arrow[r, dotted, "T_0"] \arrow[d, "p"'] & Z_0(G'(C)) \arrow[r, "\subset"] \arrow[d, "p'"] & G'_0(C) \\
H_0(G(C)) \arrow[r, "\tau_M"] & H_0(G'(C)) &
\end{tikzcd}$$

jest przemienny dla każdego $C \in \operatorname{ob}(\mathcal{C})$. Załóżmy teraz, że skonstruowane są transformacje $T_i\colon G_i \to G'_i$ dla $i < q$. Aby skonstruować $T_q\colon G_q \to G'_q$ rozważmy dla każdego $M \in \mathcal{M}$ diagram:

$$\begin{tikzcd}
S_q(M) \arrow[d, "j"] \arrow[dr, dotted, "\tau_q"] & & \\
G_q(M) \arrow[r, dotted, "T_q"] \arrow[d, "\partial_q"'] & G'_q(M) \arrow[d, "\partial'_q"] \\
G_{q-1}(M) \arrow[r, "T_{q-1}"] \arrow[d, "\partial_{q-1}"'] & G'_{q-1}(M) \arrow[d, "\partial'_{q-1}"] \\
G_{q-2}(M) \arrow[r, "T_{q-2}"] & G'_{q-2}(M)
\end{tikzcd}$$

w którym konstruujemy homomorfizm $\tau_q\colon S_q(M) \to G'_q(M)$ jak następuje: dla dowolnego $s \in S_q(M)$ element $T_{q-1}(\partial_q(j(s)) \in G'_{q-1}(M)$ jest cyklem, a zatem z acykliczności kompleksu $G'(M)$ wynika istnienie elementu $g'_s \in G'_q(M)$ takiego, że $\partial_q(g'_s) = T_{q-1}(\partial_q(j(s))$. Ponieważ $S_q(M)$ jest wolnym R-modułem, więc przyporządkowując w ten sposób generatorom elementy w $G'_q(M)$ otrzymujemy homomorfizm $\tau_q\colon S_q(M) \to G'_q(M)$, który jak poprzednio definiuje transformację $T_q\colon G_q \to G'_q$.

Analogicznie, indukcyjnie konstruujemy naturalną homotopię łańcuchową między transformacjami $T, T'\colon G \to G'$ takimi, że $H_0(T) = H_0(T')$. Zaczynamy od skonstruowania transformacji $D_0\colon G_0 \to G'_1$ takiej, że $T_0 - T'_0 = \partial'_1 D_0$ rozpatrując diagram:

$$\begin{tikzcd}
S_0(M) \arrow[r, dotted, "d_0"] \arrow[d, "j"] & G'_1(M) \arrow[d, "\partial'_1"] & \\
G_0(M) \arrow[ur, dotted, "D_0"] \arrow[r, "T_0, T'_0"] \arrow[d, "p"'] & Z_0(G'(M)) \arrow[r, "\subset"] \arrow[d, "p'"] & G'_0(M) \\
H_0(G(M)) \arrow[r, "H_0(T)", "H_0(T')"'] & H_0(G'(M)) &
\end{tikzcd}$$

Dla dowolnego $s \in S_0(M)$ zachodzi równość $p'(T_0 - T'_0)(j(s)) = 0$, a więc z definicji homologii istnieje element $g' \in G'_1(M)$ taki, że $\partial'_1(g') = (T_0 - T'_0)(j(s))$. W ten sposób definiujemy $d_0 \colon S_0(M) \to G'_1(M)$, a zatem transformację naturalną $D_0 \colon G_0 \to G'_1$ taką, że $T_0 - T'_0 = \partial'_1 D_0$. Załóżmy, że skonstruowane są naturalne homomorfizmy $D_i \colon G_i \to G'_{i+1}$ dla $i < q$ i rozważmy diagram:

$$\begin{tikzcd}
 & G_{q+1}(M) \arrow[r, "T_{q+1}", "T'_{q+1}"'] \arrow[d, "\partial_{q+1}"'] & G'_{q+1}(M) \arrow[d, "\partial'_{q+1}"] \\
S_q(M) \arrow[r, "j"] & G_q(M) \arrow[ur, dotted, "D_q"] \arrow[r, "T_q", "T'_q"'] \arrow[d, "\partial_q"'] & G'_q(M) \arrow[d, "\partial'_q"] \\
 & G_{q-1}(M) \arrow[ur, "D_{q-1}"] \arrow[r, "T_{q-1}", "T'_{q-1}"'] \arrow[d, "\partial_{q-1}"'] & G'_{q-1}(M) \arrow[d, "\partial'_{q-1}"] \\
 & G_{q-2}(M) \arrow[ur, "D_{q-2}"] \arrow[r, "T_{q-2}", "T'_{q-2}"'] & G'_{q-2}(M)
\end{tikzcd}$$

Dla $s \in S_q(M)$ rozpatrzmy element $(T_q - T'_q - D_{q-1}\partial_q)(j(s)) \in G'_q(M)$. Zauważmy, ze jest on cyklem, bowiem

$$\partial'_q(T_q - T'_q - D_{q-1}\partial_q) = \partial'_q T_q - \partial'_q T'_q - \partial'_q D_{q-1}\partial_q = T_{q-1}\partial_q - T'_{q-1}q\partial_q - \partial'_q D_{q-1}\partial_q =$$

$$(T_{q-1} - T'_{q-1} - \partial'_q D_{q-1})\partial_q = D_{q-2}\partial_{n-1}\partial_n = 0.$$

Ponieważ kompleks $G'(M)$ jest acykliczny w wymiarach dodatnich, więc korzystając jak poprzednio z wolności $S_q(M)$ konstruujemy transformację $D_q \colon G_q \to G'_{q+1}$. $\square$

Sformułujemy obecnie wariant twierdzenia o modelach acyklicznych dla funktorów o wartościach w kategorii uzupełnionych (*augumented*) kompleksów łańcuchowych. W dalszym ciągu przez R oznaczać będziemy także kompleks łańcuchowy C_* taki, że $C_0 = R$ oraz $C_q = 0$ dla $q \neq 0$.

Definicja 2. *Kompleksem łańcuchowym uzupełnionym nazywamy nieujemny kompleks C_* wyposażony w epimorfizm $\epsilon\colon C_* \to R$, który nazywamy uzupełnieniem kompleksu C_*. Morfizmem kompleksów uzupełnionych nazywamy homomorfizm $\phi\colon C_* \to C'_*$ taki, że $\epsilon = \epsilon'\phi$. Kategorię kompleksów uzupełnionych oznaczamy $\mathcal{CC}_R^+$. Kompleks uzupełniony nazywamy acyklicznym, jeśli*
$\epsilon\colon H_*(C_*) \simeq R$.

Uwaga 1. *Wolny moduł o jednym generatorze R można zastąpić dowolnym R-modułem.*

Twierdzenie 3. *Niech $G, G'\colon \mathcal{C} \to \mathcal{CC}_R^+$ będą dwoma funktorami z kategorii $\mathcal{C}$ do kategorii uzupełnionych kompleksów łańcuchowych oraz $\mathcal{M} < \mathcal{C}$ jest dyskretną podkategorią. Załóżmy ponadto, że:*

1. *Dla każdego $q \in \mathbb{Z}$ funktor $G_q\colon \mathcal{C} \to \mathrm{Mod}_R$ jest wolny, modelowany na $\mathcal{M}$, oraz $G_q = 0$ dla $q < 0$;*
2. *Funktor $G'\colon \mathcal{M} \to \mathcal{CC}_R^+$ jest acykliczny tzn. $\epsilon_M\colon H_*(G'(M)) \simeq R$.*

Wtedy istnieje transformacja naturalna $T\colon G \to G'$ oraz dowolne dwie takie są naturalnie łańcuchowo homotopijne.

Dowód. Wykażemy, że są spełnione założenia twierdzenia o modelach acyklicznych, a dokładniej, że istnieje dokladnie jedna transformacja naturalna $\tau\colon H_0(G) \to H_0(G')$ zachowująca uzupełnienie, czyli taka że $\epsilon_C = \epsilon'_C\tau_C$. Rozwazmy diagram:

$$\begin{tikzcd}
S_1(M) \arrow[r, "j"] & G_1(M) \arrow[d, "\partial_1"] & \\
S_0(M) \arrow[r, "j"] & G_0(M) \arrow[d, "p"'] \arrow[dr, dotted, "\tilde{\tau}_M"] & \\
& H_0(G(M)) \arrow[r, "\tau_M"] \arrow[d, "\epsilon"] & H_0(G'(M)) \arrow[d, "\epsilon'", "\simeq"'] \\
& R \arrow[r, "="] & R
\end{tikzcd}$$

Zauważymy, że transformacja $\epsilon'^{-1}\epsilon\colon H_0(G(M)) \to H_0(G'(M))$, zdefiniowana na $\mathcal{M}$, rozszerza się jednoznacznie do transformacji $H_0(G) \to H_0(G')$. Istotnie, korzystając z wolności funktora G_0 rozszerzamy ją do transformacji $G_0 \to H_0(G')$. Ponieważ także funktor G_1 jest wolny,a więc skoro złożenie $G_1(M) \to \partial_1 G_0(M) \to \tau_M H_0(G'(M))$ jest zerowe, to dla dowolnego C złożenie $G_1(C) \to \partial_1 G_0(C) \to \tau_M H_0(G'(C))$ jest zerowe, a więc transformacja $\tilde{\tau}_M$ wyznacza dokładnie jedną transformację $\tau\colon H_0(G) \to H_0(G')$ zachowującą uzupełnienia. □

Uwaga 2. *Dowód ostatniego twierdzenia, przechodzi bez zmian dla kompleksów wzbogaconych o odwzorowanie w dowolny R-moduł A oraz zakładając, że funktory G_q są projektywne. Otrzymujemy w ten sposób dowód znanych własności rezolwent projektywnych.*

2.3 Aksjomaty Eilenberga Steenroda dla Homologii i Kohomologii Singularnch

2.3.1 Aksjomat Homotopii

2.3.2 Aksjomat Wycinania

2.4 Twierdzenie Eilenberga Silbera

2.5 Twierdzenie Künnetha

Twierdzenie 4. *Niech R będzie dziedziną ideałów głównych. Niech C_* o D_* będą kompleksami łańcuchowymi R – modułów, przy czym C_* jest kompleksem modułów wolnych. Wówczas istnieją naturalne ciągi dokładne:*

$$0 \to \oplus_{p+q=n} H_p(C_*) \otimes H_q(D_*) \to H_n(C_* \otimes D_*) \to \oplus_{p+q=n} \operatorname{Tor}(H_p(C_*), H_{q-1}(D_*) \to 0$$

Ciąg ten jest rozszczepialny, choć rozszczepienie nie jest naturalne.

Dowód. □

2.5.1 Twierdzenie o współczynnikach uniwersalnych

Rozdział 3

CW kompleksy

3.1 Definicja i własnosci CW kompleksów

3.2 Homologie komórkowe

Rozdział 4

Struktura multyplikatywna

4.1 Iloczyn tensorowy z gradacją

Rozpatrujemy moduły nad pierścieniem przemiennym R.

Definicja 3. *Dla dowolnych R-modułów z gradacją M_*, , N_* oznaczmy przez* $\mathrm{Hom}_*(M_*, N_*)$ *moduł z gradacja taki, że* $\mathrm{Hom}_d(M, N)$ *jest zbiorem homomorfizmów $M_* \to N_*$ stopnia d. Przez $M_* \otimes N_*$ oznaczamy moduł z gradacją (iloczyn tensorowy) taki, że* $(M_* \otimes N_*)_n := \bigoplus_{p+q=n} M_p \otimes N_q$.

Stwierdzenie 2. $\mathrm{Hom}_*(L_* \otimes M_*, N_*) \simeq \mathrm{Hom}_*(L_*, \mathrm{Hom}_*(M_*, N_*))$.

Jeśli (C', ∂'), (C'', ∂'') są kompleksami łańcuchowymi to:

1. W module z gradacją $\mathrm{Hom}_*(C', C'')$ definiujemy różniczkę:

$$\partial_{\mathrm{Hom}}(\varphi) = \varphi\partial' - (-1)^d \partial''\varphi \quad \text{gdzie} \quad d = \deg(\varphi).$$

2. W iloczynie tensorowym $C_* \otimes C'_*$ definiujemy operatory brzegu

$$\partial_{\otimes}(c \otimes c') = \partial(c) \otimes c' + (-1)^p c \otimes \partial'(c') \quad \text{gdzie} \quad c \in C_p\,,\ c' \in C'_q.$$

4.2 Algebry z gradacją

Zanim przystąpimy do omawiania algebr z gradacją sformułujemy ważną własność iloczynu tensorowego dwóch R-algebr z jednością (niekoniecznie przemiennych). Dla algebr A, B R-moduł $A \otimes B$ wyposażony jest działanie $(a \otimes b)(a' \otimes b') := aa' \otimes bb'$ i naturalne włożenia $A \ni a \mapsto a \otimes 1 \in A \otimes B$ oraz odpowiednio dla $B \to A \otimes B$. Iloczyn tensorowy posiada następującą własność uniwersalności:

Stwierdzenie 3. *Niech A, B będą R-algebrami. Produkt tensorowy $A \otimes B$ wraz z włożeniami $A \to A \otimes B \leftarrow B$ posiada następującą własność uniwersalności: dla dowolnych homomorfizmów algebr $A \xrightarrow{\varphi} D \xleftarrow[\psi]{} B$ takich, że dla dowolnych elementów $a \in A$, $b \in B$ ich obrazy $\varphi(a)$, $\psi(b) \in D$ są przemienne, istnieje dokładnie jeden homomorfizm algebr $\gamma\colon A \otimes B \to D$ taki, że poniższy diagram jest przemienny.*

$$\begin{tikzcd} A \otimes B \arrow[dr, dotted, "\gamma"] & B \arrow[l] \arrow[d, "\psi"] \\ A \arrow[u] \arrow[r, "\varphi"] & D \end{tikzcd} \tag{4.1}$$

Jeśli rozpatrujemy jedynie przemienne R-algebry, to iloczyn tensorowy jest koproduktem w tej kategorii.

Definicja 4 (Algebra z gradacją)**.** *R-algebrą z gradacją nazywamy R-moduł z gradacją $A_* = \bigoplus_{q=-\infty}^{\infty} A_q$ wyposażony w R-dwuliniowe łączne mnożenie $A_* \otimes A_* \to A_*$ posiadające jedność $1 \in A_0$.*

Jeśli dla dowolnych elementów $a \in A_p$, $b \in B_q$ zachodzi równość $ab = (-1)^{pq}ba$ to R-algebra z gradacją nazywa się przemienna. Kategorię R-algebr z gradacją i homomorfizmów stopnia 0 zachowujących mnożenie oznaczamy Alg_R^* .

Dla dowolnych dwóch przemiennych algebr z gradacją A_*, B_* definiujemy ich koprodukt: produkt tensorowy R-modułów $A_* \otimes B_*$ wyposażamy w działanie:

$$(a \otimes b)(a' \otimes b') := (-1)^{d(b)d(a')} aa' \otimes bb',$$

gdzie $d(-)$ oznacza stopień elementu jednorodnego.

Stwierdzenie 4. *Iloczyn tensorowy przemiennych algebr z gradacją jest koproduktem w kategorii przemiennych algebr z gradacją tzn. dla dowolnych homomorfizmów przemiennych algebr z gradacją $A_* \to \varphi D_* \leftarrow \psi B_*$ istnieje dokładnie jeden homomorfizm algebr $\gamma\colon A_* \otimes B_* \to D_*$ taki, że poniższy diagram jest przemienny.*

$$\begin{tikzcd} A_* \otimes B_* \arrow[dr, dotted, "\gamma"] & B_* \arrow[l] \arrow[d, "\psi"] \\ A_* \arrow[u] \arrow[r, "\varphi"] & D_* \end{tikzcd} \tag{4.2}$$

Każda przemienna R-algebra bez gradacji staje się algebrą z gradacją jeśli przypisać wszystkim jej elementom gradację 0.

Dowolnemu R-modułowi M można przyporządkować jego *algebrę tensorową* $T(M) = \bigoplus_{q=0}^{\infty} M^{\otimes q}$. Jest to algebra z gradacją: $T(M)_q = M^{\otimes q}$. Funktor $T\colon R\text{-}\mathrm{Mod} \to R\text{-}\mathrm{Alg}$ jest funktorem lewo dołączonym do funktora zapominania o strukturze algebry. Algebra tensorowa jest więc algebrą wolną (bardzo nieprzemienną) generowaną przez moduł. Z modułem M są także związane dwie inne ważne algebry:

- Algebrę symetryczną: $S(M) := T(M)/I$ gdzie I jest ideałem generowanym przez elementy postaci $a \otimes b - b \otimes a$ dla $a, b \in T(M)$. Jest to oczywiście algebra przemienna, a $S\colon R\text{-}\mathrm{Mod} \to R\text{-}\mathrm{Alg}_{\mathrm{comm}}$ jest funktorem lewo dołączonym do funktora zapominania z kategorii algebr przemiennych do kategorii R-modułów. Algebra symetryczna dziedziczy gradację z algebry tensorowej i chociaż jest algebrą przemienną, to NIE jest algebrą przemienną z gradacją! Stałaby się przemienna, gdyby elementom M przypisać gradacje parzyste lub $\mathrm{char}(K) = 2$.

- Algebrę zewnętrzną: $\Lambda(M) := T(M)/I$ gdzie I jest dwustronnym ideałem generowanym przez kwadraty a^2, gdzie $a \in M$. Algebra ta jest przemienną algebrą z gradacją.

Rozpatrzymy teraz powyższe konstrukcje w przypadku gdy startujemy z modułu z gradacją M_*. W takim przypadku gradację w algebrze tensorowej definiujemy przy pomocy gradacji w iloczynach tensorowych tzn. $T(M_*)_q = \bigoplus_{n=0}^{\infty} (M^{\otimes q})_n$. Jeśli $M_* = M_0$ to definicje te pokrywają się.

Skonstruujemy teraz wolną przemienną algebrę z gradacją generowaną przez moduł z gradacją M_*: $F(M_*) := T(M_*)/I$ gdzie I jest ideałem generowanym przez elementy $ab - (-1)^{pq}ba$ gdzie $a \in M_p$, $b \in M_q$ są dowolnymi elementami jednorodnymi. Jeśli $M = M_{ev}$ to $F(M_*) = S(M_*)$. Jeśli $M = M_{odd}$ i mnożenie przez 2 jest monomorfizmem w M to $F(M_*) = \Lambda(M_*)$.

Funktor $F\colon R\text{-}\mathrm{mod} \to R\text{-}\mathrm{Alg}_*$ jest dołączony do funktora zapominania, a zatem zachowuje koprodukty.

Stwierdzenie 5. *Jeśli $R = K$ jest ciałem charakterystyki $\neq 2$ to dla dowolnego K-modułu z gradacją M_* przemienna K-algebra z gradacją $F(M_*)$ jest izomorficzna z R-algebrą $S(M_{ev}) \otimes \Lambda(M_{odd})$ gdzie $M_* = M_{ev} \oplus M_{odd}$ jest rozkładem na sumę elementów gradacji parzystej i nieparzystej. Jeśli* $\mathrm{char}(K) = 2$*, to $F(M_*) = S(M_*)$.*

Dowód. Ponieważ jak zauważyliśmy funktor F zachowuje koprodukty, więc gdy $\mathrm{char}(K) \neq 2$ to

$$F(M_*) = F(M_{ev}) \otimes F(M_{odd}) = S(M_{ev}) \otimes \Lambda(M_{odd}).$$

W przypadku gdy $\mathrm{char}(K) = 2$ z definicji algebry wolnej wynika, że $F(M_*) = S(M_*)$. $\square$

4.3 Mnożenia i dzielenia - sytuacja algebraiczna

Niech C', C'' oraz M', M'', M będą R–modułami oraz niech będzie dany homomorfizm $\mu\colon M' \otimes M'' \to M$. Zdefiniujemy cztery homomorfizmy będące algebraicznym fundamentem struktur multyplikatywnych w (ko-) homologiach singularnych przestrzeni topologicznych.

1. Produkt krzyżowy (*cross product*)

$$(C' \otimes M') \otimes (C'' \otimes M'') \to \times C' \otimes C'' \otimes M$$

$$(c' \otimes m') \times (c'' \otimes m'') := c' \otimes c'' \otimes \mu(m' \otimes m'')$$

2. Produkt krzyżowy (*cross product*)

$$\mathrm{Hom}(C', M') \otimes \mathrm{Hom}(C'', M'') \to \times \mathrm{Hom}(C' \otimes C'', M)$$

$$(\varphi \otimes \psi)(c' \otimes c'') := \mu(\varphi(c') \otimes \psi(c''))$$

3. Dzielenie (*slant product*)

$$\mathrm{Hom}(C' \otimes C'', M') \otimes C'' \otimes M'' \to / \mathrm{Hom}(C', M)$$

$$(\varphi/(c'' \otimes m''))(c') := \mu(\varphi(c' \otimes c'') \otimes m'')$$

4. Dzielenie (*slant product*)

$$\mathrm{Hom}(C', M') \otimes (C' \otimes C'' \otimes M'') \to \backslash C'' \otimes M$$

$$\varphi \backslash (c' \otimes c'' \otimes m'') := c'' \otimes \mu(\varphi(c') \otimes c'').$$

Działania 1-4 są naturalne ze względu na homomorfizmy modułów. Jest to oczywiste w przypadku produktów krzyżowych, bowiem są one transformacjami naturalnymi między funktorami tej samej wariantności. W przypadku dzieleń naturalność wynika z naturalności homomorfizmu ewaluacji: $\mathrm{Hom}(C, M) \otimes C \to M$, która ma następującą postać. Rozpatrzmy homomorfizmy modułów $f\colon D \to C$ oraz $g\colon M \to N$ i diagram:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}(C, M) \otimes C \arrow[r, "\langle -,- \rangle"] \arrow[d, "\mathrm{Hom}(f^*, g_*)"'] & M \arrow[d, "g"] \\
\mathrm{Hom}(D, N) \otimes D \arrow[r, "\langle -,- \rangle"] \arrow[u, "f"'] & N
\end{tikzcd} \tag{4.3}$$

Stwierdzenie 6. *Dla dowolnych elementów $\varphi \in \mathrm{Hom}(C, M)$ oraz $d \in D$ zachodzi równość:*

$$\langle \mathrm{Hom}(f^*, g_*)(\varphi), d \rangle = g\langle \varphi, f(d) \rangle$$

Jeśli C'_*, C''_* są kompleksami łańcuchowymi, to opisane produkty można traktować jako homomorfizmy kompleksów łańcuchowych w przypadku produktów 1. i 4. oraz kołańcuchowych w przypadku produktów 2. i 3. Biorąc produkt tensorowy kompleksu łańcuchowego i kołańcuchowego odwracamy gradację w jednym z nich na przeciwną tzn. $C^n := C_{-n}$. Uwzględniając gradację powyższe produkty przesuwają gradacje w następujący sposób:

1. Produkt krzyżowy (*cross product*) $(C'_p \otimes M') \otimes (C''_q \otimes M'') \to \times(C' \otimes C'')_{p+q} \otimes M$,
2. Produkt krzyżowy (*cross product*) $\mathrm{Hom}(C'_p, M') \otimes \mathrm{Hom}(C''_q, M'') \to \times \mathrm{Hom}((C' \otimes C'')_{p+q}, M)$
3. Dzielenie (*slant product*) $\mathrm{Hom}((C' \otimes C'')_n, M') \otimes C''_q \otimes M'' \to / \mathrm{Hom}(C'_{n-q}, M)$
4. Dzielenie (*slant product*) $\mathrm{Hom}(C'_p, M') \otimes ((C' \otimes C'')_n \otimes M'') \to \backslash C''_{n-p} \otimes M$

Dla przeniesienia powyższych działań na grupy (ko-)homologii wykorzystujemy, że mnożenie krzyżowe jest dobrze zdefiniowane na klasach homologii. przenosi się na homologie. Dla dowolnych kompleksów łańcuchowych (lub kołańcuchowych) mamy:

$$H_p(C'_*) \otimes H_q(C''_*) \to \times H_{p+q}(C'_* \otimes C''_*).$$

a zatem dobrze zdefiniowane są następujące produkty:

1. Produkt krzyżowy (*cross product*) $H_p(C'_*; M') \otimes H_q(C''_*; M'') \to \times H_{p+q}((C' \otimes C'')_*; M)$,
2. Produkt krzyżowy (*cross product*) $H^p(C'_*; M') \otimes H^q(C''_*; M'') \to \times H^{p+q}((C' \otimes C'')_*; M)$
3. Dzielenie (*slant product*) $H^n((C' \otimes C'')_*, M') \otimes H_q(C''_*; M'') \to / H^{n-q}(C'_*; M)$
4. Dzielenie (*slant product*) $H^p(C'_*, M') \otimes H_n((C' \otimes C'')_*; M'') \to \backslash H_{n-p}(C''_*; M)$

4.4 Produkty w (ko-)homologiach przestrzeni topologicznych

Załóżmy teraz, że dane są przestrzenie topologiczne X, Y a $C'_* = \Delta_*(X)$, $C''_* = \Delta_*(Y)$ są ich kompleksami łańcuchów singularnych oraz $\Delta_*(X) \otimes \Delta_*(Y) \to EZ\Delta_*(X \times Y)$ będzie równoważnością Eilenberga-Zilbera. Składając opisane produkty z EZ lub jej odwrotnością otrzymujemy produkty:

1. Produkt krzyżowy (*cross product*) $H_p(X; M') \otimes H_q(Y; M'') \to \times H_{p+q}(X \times Y; M)$,

2. Produkt krzyżowy (*cross product*) $H^p(X;M')\otimes H^q(Y;M'') \to \times H^{p+q}(X\times Y;M)$

3. Dzielenie (*slant product*) $H^n(X\times Y;M')\otimes H_q(Y;M'') \to /H^{n-q}(X;M)$

4. Dzielenie (*slant product*) $H^p(X;M')\otimes H_n(X\times Y;M'') \to \backslash H_{n-p}(Y;M)$

Powyższe produkty są dobrze zdefiniowane, gdy zastąpimy przestrzenie przez pary przestrzeni (X,A), (Y,B), przy czym wtedy $(X,A)\times(Y,B) := (X\times Y, A\times Y\cup X\times B)$ oraz zakładamy, że $\{A\times Y, X\times B\}$ jest parą wycinającą.

W przypadku gdy $X=Y$ produkty i rozważamy pary (X,A) oraz (X,B) produkty 2. i 4. możemy złożyć z odwzorowaniem diagonalnym $\delta\colon (X,A\cup B)\to(X\times X, A\times X\cup X\times B)$ otrzymując tzw. produkty wewnętrzne:

1. Cup product $H^p(X,A;M')\otimes H^q(X,B;M'') \to \cup H^{p+q}(X,A\cup B;M)$

2. Cap product $H^p(X,A;M')\otimes H_n(X,A\cup B;M'') \to \cap H_{n-p}(X,B;M)$

Stwierdzenie 7. *Dla dowolnych elementów $\varphi'\in H^p(X;R)$, $\varphi''\in H^q(Y;R)$ zachodzi równość*

$$\varphi'\times\varphi'' = p_X^*(\varphi')\cup p_Y^*(\varphi'').$$

Wniosek 1. *Homomorfizm Eilenberga-Zilbera $H^*(X)\otimes H^*(Y)\to H^*(X\times Y)$ jest homomorfizmem algebr z gradacją.*

Wniosek 2. *Niech $S^{n_1}\times ...\times S^{n_k}$ będzie produktem sfer. Mnożenie zadaje naturalny izomorfizm algebr $F(\tilde{H}^*(S^{n_1})\oplus ...\oplus \tilde{H}^*(S^{n_k}))/\{u_1^2,\dots,u_k^2\}\simeq H^*(S^{n_1}\times ...\times S^{n_k};R)$. gdzie $u_j\in\tilde{H}^{n_j}(S^{n_j})$ jest generatorem, a wszystkie grupy kohomologii mają współczynniki w pierścieniu R.*

Rozdział 5

Teoria homotopii

5.1 Korozwłóknienia i rozwłóknienia

5.1.1 Walce i ko-walce

Definicja 5. *Niech X będzie przestrzenią topologiczną.*

- Walcem (lub cylindrem) o podstawie X *nazywamy włożenie* $X \to i_0 X \times I$.
- Kowalcem (lub kocylindrem) nad X *nazywamy projekcję* $P(X) \to p_0 X$ *gdzie* $P(X) := X^I = \mathrm{Map}(I, X)$ *oraz* $p_0(\omega) := \omega(0)$.

Konstrukcje walca i kowalca są do siebie dualne, co znajduje wyraz w bijekcji (a nawet homeomorfizmie) $\mathrm{Map}(X \times I, Y) \simeq \mathrm{Map}(X, P(Y))$.

Definicja 6. Walcem (lub cylindrem) przekształcenia $f : X \to Y$ *nazywa się przestrzeń* $Z(f)$ *z włożeniem* $i_0 : Y \hookrightarrow Z(f)$ *zdefiniowanym jako push-out diagramu:*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i_0"'] & Y \arrow[d, "i_0"] \\ X \times I \arrow[r, "\bar{f}"'] & Z(f) \end{tikzcd}$$

Definicja 7. Kowalcem (lub kocylindrem) *przekształcenia* $f : X \to Y$, *nazywa się przestrzeń* $P(f)$ *wraz z projekcją* $p_0 : P(f) \to X$ *zdefiniowane jako pull-back diagramu :*

$$\begin{tikzcd} P(f) \arrow[r, "\tilde{f}"] \arrow[d, "p_0"'] & P(Y) \arrow[d, "p_0"] \\ X \arrow[r, "f"] & Y \end{tikzcd}$$

Konstrukcje walca i kowalca przekształcenia są funktorialne ze względu na morfizmy przekształceń. Dowolny diagram

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & X' \arrow[d, "f'"] \\ Y \arrow[r] & Y' \end{tikzcd}$$

indukuje odwzorowania $Z(f) \to Z(f')$ oraz $P(f) \to P(f')$ dla których odpowiednie diagramy są przemienne.

5.1.2 Retrakcje

Pojęcie retrakcji można zdefiniować w dowolnej kategorii $\mathcal{C}$. *Retrakcją* morfizmu $A \to fX$ nazwiemy morfizm $X \to rA$ taki, że złożenie $A \to fX \to rA$ jest identycznością.

W dalszym ciągu ograniczamy się więc do włożeń podzbiorów.

Definicja 8. *Niech $A \subseteq X$ bedzie podprzestrzenia przestrzeni X a $i_A : A \hookrightarrow X$ oznacza włożenie.*

1. *Przekształcenie $r : X \to A$ nazywa się* retrakcją X na A, *jeżeli $r \circ i_A = id_A$. Podzbiór A nazywa się* retraktem X

2. *Retrakcja $r : X \to A$ nazywa się* retrakcją deformacyjną, *jeżeli złożenie $i_A \circ r$ jest homotopijne z id_X; podzbiór $A \subseteq X$ nazywa się wtedy* retraktem deformacyjnym X.

3. *Retrakcja $r : X \to A$ nazywa się* silną retrakcją deformacyjną, *jeżeli złożenie $i_A \circ r$ jest homotopijne z id_X względem A; podzbiór $A \subseteq X$ nazywa się wtedy* silnym retraktem deformacyjnym X.

5.1.3 Korozwłóknienia i rozwłóknienia

W kategorii $\mathcal{T}$ wyróżniamy dwie ważne klasy przekształceń: rozwłóknienia i korozwłóknienia. Opisane wyżej konstrukcje walca i kowalca przekształcenia pozwalają rozłożyć dowolne przekształcenie na superpozycję korozwłóknienia i homotopijnej równoważności oraz homotopijnej równoważności i rozwłóknienia. Rozwłóknienia i korozwłóknienia odgrywają ogromna rolę w badaniu homotopijnych własności przestrzeni topologicznych.

Twierdzenie 5. *Dla przekształcenia $j : A \to X$ nastepujące warunki są równoważne.*

1. *Dla dowolnego przemiennego kwadratowego diagramu odwzorowań ciągłych istnieje przekątna:*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "F"] \arrow[d, "j"'] & P(Y) \arrow[d, "p_0"] \\ X \arrow[r, "f"'] \arrow[ur, dotted, "\bar{F}"] & Y \end{tikzcd}$$

2. *Odwzorowanie* $\bar{j}\colon Z(j) \to Z(id) = X \times I$ *indukowane przez morfizm:*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "j"] \arrow[d, "j"'] & X \arrow[d, "id"] \\ X \arrow[r, "id"'] & X \end{tikzcd}$$

posiada lewą odwrotność $r : X \times I \to Z(j)$*, czyli* $Z(j)$ *jest retraktem walca* $X \times I$ *-* r *nazywa się funkcją retrahującą korozwłoknienia* j*:*

3. $j : A \to X$ *ma* własność rozszerzania homotopii *(HEP* [1]*) tzn. dla dowolnego warunku początkowego* $f_0 : X \to Y$ *i homotopii* $F : A \times I \to Y$*, spełniającej warunek* $f_0(i(a)) = F(a, 0)$ *dla* $a \in A$ *istnieje rozszerzenie* $\bar{F} : X \times I \to Y$*,* $\bar{F}(x, 0) = f_0$*.*

$$\begin{tikzcd} & A \times I \arrow[d, "F"] \arrow[dr] & \\ A \times \{0\} \arrow[ur] \arrow[dr, "j"'] & Y & X \times I \arrow[l, "\bar{F}"] \\ & X \times \{0\} \arrow[u, "f_0"] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

Definicja 9. *Przekształcenie* $j : A \to X$ *spełniające jeden z warunków poprzedniego stwierdzenia nazywa się* korozwłóknieniem. *Korozwłóknienia takie, że* $j(A) \subset X$ *jest podzbiorem domkniętym nazywamy domkniętymi korozwłóknieniami lub* parami Borsuka

Stwierdzenie 8. *Jeśli* $j\colon A \to X$ *jest korozwłóknieniem, to* $j\colon A \to j(A)$ *jest homeomorfizmem na obraz (a więc* j *jest różnowartościowe). Jeśli* X *jest przestrzenią Hausdorffa to* $j(A) \subset X$ *jest domknięty.*

[1] Homotopy Extension Property

Włożenie podzbioru domkniętego $A \hookrightarrow X$ jest korozwłoknieniem wtedy i tylko wtedy gdy $X \times \{0\} \cup A \times I$ jest retraktem $X \times I$.

Włożenie $S^{n-1} \subset D^n$ jest korozwłóknieniem.

Twierdzenie 6. *Dla przekształcenia $p : E \to B$ nastepujące warunki są równoważne.*

1. *p ma* własność podnoszenia homotopii *(HLP [2]) tzn.dla dowolnego przemiennego diagramu ciągłych strzałek:*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\tilde{f}_0"] \arrow[d, "i_0"'] & E \arrow[d, "p"] \\ X \times I \arrow[r, "F"'] \arrow[ur, dotted, "\tilde{F}"] & B \end{tikzcd}$$

   istnieje strzałka przerywana (podniesienie) $\tilde{F}$.

2. *Dla diagramu*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[dr, dotted, "\tilde{F}"] \arrow[drr, "f"] \arrow[ddr, "F"'] & & \\ & P(E) \arrow[r, "p_0"] \arrow[d, "\bar{p}"'] & E \arrow[d, "p"] \\ & P(B) \arrow[r, "p_0"'] & B \end{tikzcd}$$

   w którym $\bar{p}(\omega) = p \circ \omega$ i przekształceń $F : X \to P(B)$ oraz $f : X \to E$ czyniących odpowiednie diagramy przemiennymi, istnieje odwzorowanie $\tilde{F} : X \to P(E)$ dla którego odpowiednie diagramy są przemienne.

3. *Odwzorowanie $\bar{p}$: $P(E) \to P(p)$ wyznaczone przez przemienny diagram*

$$\begin{tikzcd} P(E) \arrow[r, "p_0"] \arrow[d, "p_*"'] & E \arrow[d, "p"] \\ P(B) \arrow[r, "p_0"'] & B \end{tikzcd}$$

[2] Homotopy Lifting Property

i fakt, że diagram

$$\begin{tikzcd} P(p) \arrow[r] \arrow[d] & E \arrow[d, "p"] \\ P(B) \arrow[r, "p_0"'] & B \end{tikzcd}$$

jest pull - backiem ma prawą odwrotność tzn. $s\colon P(p) \to P(E)$ *takie, że* $\bar{p} \circ s = id_{P(p)}$ *- odwzorowanie* s *nazywa się funkcja podnoszącą drogi rozwłóknienia* p

$$\begin{tikzcd} P(p) \arrow[dr, bend left, dashed, "s"] \arrow[drr] \arrow[ddr, bend right, "\bar{p}"'] & & \\ & P(E) \arrow[r, "p_0"] \arrow[d, "p_*"'] \arrow[ul, bend left] & E \arrow[d, "p"] \\ & P(B) \arrow[r, "p_0"'] & B \end{tikzcd}$$

Definicja 10. *Przekształcenie* $p : E \to B$ *spełniające jeden z warunków poprzedniego stwierdzenia nazywa się rozwłóknieniem Hurewicza, lub krótko* rozwłóknieniem .

Zauważmy, że warunki nr 2 w definicjach korozwłóknienia i rozwłóknienia są "wewnętrzne" tzn nie odwołują się do innych przestrzeni i odwzorowań.

Stwierdzenie 9. *Jeśli* $p\colon E \to B$ *jest rozwłóknieniem, to obraz* $p(E)$ *jest sumą pewnych składowych łukowej spójności* B.

Stwierdzenie 10. *Dla dowolnych przestrzeni projekcja* $B \times F \to B$ *jest rozwłóknieniem a włożenie* $X \subset X \coprod Y$ *jest korozwłóknieniem.*

Stwierdzenie 11. *Następujące konstrukcje zachowują klasy (ko-)rozwłóknień:*

1. *Przekształcenie izomorficzne w kategorii* $\mathrm{Mor}(\mathcal{T})$ *z (ko-)rozwłóknieniem jest (ko-)rozwłóknieniem;*

2. *Złożenie (ko-)rozwłóknień jest (ko-)rozwłóknieniem;*

3. *Pull-back (push-out) rozwłóknienia (ko-rozwłóknienia) jest rozwłóknieniem (ko-rozwłóknieniem);*

4. *Retrakt (ko-)rozwłóknienia w kategorii* $\mathrm{Mor}(\mathcal{T})$ *jest (ko-)rozwłóknieniem;*

5. *Koprodukt i produkt (ko-)rozwłóknień jest (ko-)rozwłóknieniem.*

Dowód. Udowodnij ostatnie stwierdzenie, używając do poszczególnych tez najodpowiedniejszego z równoważnych warunków definiujacych (ko-)rozwłóknienie. □

Dualność między korozwłóknieniami i rozwłóknieniami, którą można zauważyć już w definicjach i poprzednich zadaniach, opisuje nastepujące twierdzenie:

Twierdzenie 7 (K.Borsuk)**.** *Jeśli $j : A \to X$ jest korozwłóknieniem, A oraz X są Hausdorffa i CG, to $j^* : \mathrm{Map}(X, Y) \to \mathrm{Map}(A, Y)$ jest rozwłóknieniem. Jeśli j jest homotopijną równoważnością, to j^* też jest homotopijną równoważnością.*

Dowód. Niech $Z(j) \to \bar{j}X \times I \to rZ(j)$ będzie retrakcja walca nad X na walec j. Zastosujmy do tych przestrzeni funktor $\mathrm{Map}(-, Y)$ i stosując tw. .... otrzymujemy przemienny diagram w którym pionowe strzałki są homeomorfizmami:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Map}(Z(j), Y) \arrow[d, "\simeq"'] & \mathrm{Map}(X \times I, Y) \arrow[l, "\bar{j}^*"'] \arrow[d, "\simeq"'] & \mathrm{Map}(Z(j), Y) \arrow[l, "r^*"'] \arrow[d, "\simeq"'] \\
P(\bar{j}^*) & P(\mathrm{Map}(X, Y)) \arrow[l, "j^*"'] & P(\bar{j}^*) \arrow[l, "r^*"']
\end{tikzcd}$$

Homeomorfizm $\mathrm{Map}(Z(j), Y) \simeq P(\bar{j}^*)$ wynika stąd, że funktor $\mathrm{Map}(-, Y)$ przeprowadza diagram push-out definiujący walec w diagram pull-back definiujący ko-walec:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Map}(A, Y) & \mathrm{Map}(X, Y) \arrow[l, "j^*"'] \\
\mathrm{Map}(A \times I, Y) \arrow[u, "i_0^*"] & \mathrm{Map}(Z(j), Y) \arrow[l, "\bar{j}^*"'] \arrow[u, "i_0^*"']
\end{tikzcd}$$

Pamiętajmy, że $P(\mathrm{Map}(A, Y)) \simeq \mathrm{Map}(A \times I, Y)$. □

Przykład 2. *Odwzorowania obcięcia* $\mathrm{Map}(D^n, Y) \to \mathrm{Map}(S^{n-1}, Y)$ *są rozwłóknieniami. Jeśli włożenie $\{x_0\} \subset X$ jest korozwłóknieniem, to ewaluacja $ev : \mathrm{Map}(X, Y) \to Y,\ ev(f) := f(x_0)$ jest rozwłóknieniem.*

Następne twierdzenie jest bardzo ważne i powiada, że każde przekształcenie można z homotopijnego punktu widzenia zamienić zarówno na rozwłóknienie jak i korozwłóknienie.

Twierdzenie 8. *Dla dowolnego przekształcenia $f\colon X \to Y$ istnieje przemienny diagram, funktorialnie zależący od przekształcenia f (tzn. morfizm przekształceń indukuje morfizm diagramów):*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\approx", "s_0"'] \arrow[d, "i_f"'] \arrow[dr, "f"] & P(f) \arrow[d, "p_f"] \\ Z(f) \arrow[r, "\approx", "r_0"'] & Y \end{tikzcd}$$

w którym: $i_f(x) := [x, 1]$, $r_0[x, t] := f(x)$, $r_0(y) := y$, $s_0(x) := (x, \omega_{f(x)})$, $p_f(x, \omega) := \omega(1)$. *Odwzorowania s_0 i r_0 są homotopijnymi równoważnosciami; i_f jest korozwłóknieniem, a p_f jest rozwłóknieniem.*

Dowód. Wykażemy, że przekształcenie i_f jest korozwłóknieniem. Ponieważ $\partial I \subset I$ jest korozwłóknieniem, więc $X \times \partial I \subset X \times I$ jest korozwłóknieniem. Mamy diagram push-out, w którym utożsamiamy $X \times \partial I = X \coprod X$

$$\begin{tikzcd} X \times \partial I \arrow[r, "f \coprod id"] \arrow[d, "i"'] & Y \coprod X \arrow[d, "\bar{i}_f"] \\ X \times I \arrow[r, "\bar{f}"'] & Z(f) \end{tikzcd}$$

Przekształcenie i_f jest złożeniem $X \hookrightarrow Y \coprod X \to Z(f)$.

Dualnie, dowiedziemy że p_f jest rozwłóknieniem: Ponieważ $\partial I \subset I$ jest korozwłóknieniem, więc na mocy twierdzenia Borsuka odwzorowanie $P(Y) = \mathrm{Map}(I, Y) \to \mathrm{Map}(\partial I, Y) = Y \times Y$ jest rozwłóknieniem. Rozpatrzmy pullback diagram:

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, "\widetilde{f \times id}"] \arrow[d, "\bar{p}_{0,1}"'] & P(Y) \arrow[d, "p_{0,1}"] \\ X \times Y \arrow[r, "f \times id"'] & Y \times Y \end{tikzcd}$$

i zauważmy, że $W = \{(x, y, \omega) \,|\, \omega(0) = f(x)\,,\, \omega(1) = y\} = \{(x, \omega) \,|\, \omega(0) = f(x)\} = P(f)$ Złożenie $P(f) \to Y \times X \to Y$ jest więc rozwłóknieniem.

Sprawdzenie, że i_0 oraz r są homotopijnymi równoważnościami pozostawiamy czytelnikowi. □

Definicja 11. *Niech $f : X \to Y$ będzie dowolnym odwzorowaniem.*

- Homotopijnym włóknem f nad $y_0 \in Y$ *nazywamy przeciwobraz* $F(f, y_0) := p_f^{-1}(y_0)$,

- Homotopijnym kowłóknem f *lub* stożkiem f *nazywamy przestrzeń ilorazową* $C(f) := Z(f)/X$.

Włókno i kowłókno homotopijne wpisują się w diagram:

$$\begin{tikzcd}
 & & F(f,y_0) := p_f^{-1}(y_0) \arrow[d, hook] \\
X \arrow[r, "s_0"] \arrow[d, "i_f"'] \arrow[drr, "f"] & & P(f) \arrow[d, "p_f"] \\
Z(f) \arrow[rr, "r_0"'] \arrow[d, "q"] & & Y \\
C(f) := Z(f)/X & &
\end{tikzcd}$$

5.1.4 Lokalny opis korozwłóknień i rozwłóknień

Poniższe twierdzenie opisuje w terminach wewnętrznych i lokalnych kiedy podprzestrzeń jest korozwłóknieniem.

Twierdzenie 9. *Dla domkniętego podzbioru $A \subset X$ następujące warunki są równoważne:*

1. *$A \subset X$ jest korozwłóknieniem;*
2. *$X \times \{0\} \cup A \times I \subseteq X \times I$ jest silnym retraktem deformacyjnym;*
3. *Istnieje deformacja relA, $D : X \times I \to X$ (tzn. homotopia taka, że $D(x,0) = x$, $D(a,t) = a$), funkcja $\varphi : X \to I$ taka, że $A = \varphi^{-1}(1)$ oraz $D(\varphi^{-1}((0,1]) \times \{1\}) \subset A$;*

Dowód. [1. $\Leftrightarrow$ 2.] Jest jasne, że [2 $\Rightarrow$ 1], gdyż warunek 1. jest równowazny istnieniu retrakcji. Należy pokazać, że retrakcja ta jest silną retrakcją deformacyjną. Niech $r : X \times I \to X \times \{0\} \cup A \times I$, $r(x,t) = (r_1(x,t), r_2(x,t))$ będzie retrakcją. Zdefiniujmy $G : X \times I \times I \to X \times I$ wzorem:

$$G((x,t),s) = (r_1(x,st), sr_2(x,t) + (1-s)t).$$

Łatwo widać, że G jest homotopią pomiędzy id a retrakcją r i ponadto dla $x \in A$ i dowolnego $s \in I$, $G((x,t),s) = (x,(1-s)t + ts) = (x,t)$. [1. $\Rightarrow$ 3.] Ponieważ $A \subset X$ jest korozwłóknieniem, istnieje retrakcja $r : X \times I \to X \times \{0\} \cup A \times I$, która posłuży nam do konstrukcji D i φ. Niech

$\pi_X : X \times I \to X$ oraz $\pi_I : X \times I \to I$ będą projekcjami i zdefiniujmy $\varphi : X \to I$ wzorem $\varphi(x) := 1 - \sup\{\|t - \pi_I r(x,t)\| \mid t \in I\}$. Jest ono ciągłe (sprawdzić !) i $\varphi^{-1}(1) = A$. Jest jasne, że dla $x \in A$, $\varphi(x) = 1$. Jeżeli $\varphi(x) = 1$, to dla każdego t, $\pi_I r(x,t) = t$, czyli $r(x,t) \in A \times I$ dla $t > 0$ a stąd także $r(x,0) \in A \times I$ gdyż $A \times I \subset X \times I$ jest podzbiorem domkniętym.

Definiujemy $D : X \times I \to X$ wzorem $D(x,t) = \pi_X r(x,t)$.

[3. $\Rightarrow$ 1.] Przy pomocy D i φ definiujemy retrakcję $r : X \times I \to X \times \{0\} \cup A \times I$:

$$r(x,t) = \begin{cases} (D(x,t), 0) & \text{dla } t \leq \varphi(x) \ , \\ (D(x,t), t - 1 + \varphi(x)) & \text{dla } t \geq \varphi(x). \end{cases}$$

□

Warunek 3 powyższego Twierdzenia jest równoważny natępującemu wygodnemu kryterium:

Twierdzenie 10. *Dla domkniętego podzbioru $A \subset X$ włożenie jest korozwłóknieniem wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje otoczenie $U \supset A$ deformowalne* $\mathrm{rel}(A)$ *w X do A (tzn. istnieje homotopia $H : U \times I \to X$ taka, że $H(x,0) = x$, $H(a,t) = a$, $H(x,1) \subset A$) oraz funkcja $\varphi : X \to I$ taka, że $A = \varphi^{-1}(1)$ i $\varphi(x) = 0$ dla $x \in X \setminus U$.*

Uwaga 3. *Zauważmy, że jesli X jest przestrzenią metryzowalną, to mając deformację H funkcje φ mozna zawsze skonstruuować. Daje to bardzo intuicyjny warunek na to, by włożenie $A \subset X$ było korozwłóknieniem: wystarczy, żeby istniało otoczenie $U \supset A$ deformujące się w X do A. Można stąd łatwo wydedukować, że włożenia podrozmaitości domkniętej w rozmiatość gładką lub podwielościanu w wielościan są korozwłóknieniami.*

Stwierdzenie 12. *Jeżeli $A \subset X$ i $B \subset Y$ są parami Borsuka, to włożenia $A \times B \subset X \times B \cup A \times Y$ oraz $X \times B \cup A \times Y \subset X \times Y$ są parami Borsuka.*

Z tego stwierdzenia łatwo wynika następujący wniosek, ważny dla dalszych rozważań:

Wniosek 3. *Jeżeli włożenie punktu $\{x_0\} \hookrightarrow X$ jest korozwłóknieniem, to włożenie $\{x_0\} \times I \hookrightarrow |SigmaX$ jest także korozwłóknieniem.*

Charakteryzacja korozwłóknień podana w poprzednim stwierdzeniu jest bardzo pomocna w dowodzeniu homotopijnej równoważności przestrzeni.

Twierdzenie 11. *Niech $A \to iX$ będzie korozwłóknieniem. Każdej homotopii $F : A \times I \to Y$ odpowiada homotopijna równoważność $h_A : Y \cup_{f_0} X \simeq Y \cup_{f_1} X \,\mathrm{rel}(Y)$, przy czym homotopii trywialnej odpowiada id a kompozycji homotopii odpowiada (z dokładnością do homotopii) złożenie homotopijnych równoważności.*

Dowód. Niech $F : A \times I \to Y$ będzie homotopią między f_0 i f_1. Wykażemy, że oba włożenia $X \cup_{f_k} Y \subseteq (X \times I) \cup_F Y$ dla $k = 0, 1$ są retraktami deformacyjnymi. Ze względu na symetrię wystarczy ograniczyć się do $k = 0$. Zauważmy oczywisty homeomorfizm, wynikający z definicji doklejania:

$$X \cup_{f_0} Y = (X \times \{0\} \cup A \times I) \cup_F Y \subset (X \times I) \cup_F Y.$$

Niech $r : X \times I \to X \times \{0\} \cup A \times I$ będzie silną retrakcją deformacyjną zaś G homotopią definiującą silną deformację. Kładąc identyczność na przestrzeni Y retrakcję r rozszerzamy do retrakcji $r_0 : (X \times I) \cup_F Y \to X \cup_{f_0} Y$. Ponieważ homotopia G jest stała na $X \times \{0\} \cup A \times I$, to rozszerza się w oczywisty sposób do homotopii $\bar{G}$ kładąc identyczność na przestrzeni Y. □

Wniosek 4. *Jeśli $j : A \subset X$ jest parą Borsuka oraz A jest zbiorem ściągalnym, to projekcja $X \to X/A$ jest homotopijną równoważnością. Dla dowolnej pary Borsuka $j : A \subset X$ projekcją $C(f) := Z(f)/X \times \{1\} \to X/A$ jest homotopijną równoważnością, czyli homotopijne kowłókno korozwłoknienia jest homotopijnie równoważne z przestrzenią ilorazową.*

Dowód. Udowodnić ostatni wniosek bezpośrednio z definicji korozwłóknienia. □

Stwierdzenie 13. *Jeśli $j : A \subset X$ jest parą Borsuka i X jest ściągalna, to przestrzeń X/A jest homotopijnie równoważna z zawieszeniem $\Sigma(A)$.*

Ostatni wniosek jest potężnym narzędziem dowodzenia nieoczywistych homotopijnych równoważności.[p.Zadania różne.]

Twierdzenie 12. *Hurewicza Jeśli $p\colon E \to B$ jest przekształceniem takim, że dla pewnego numerowalnego pokrycia otwartego $\{U_i\}_{i\in I}$ obcięcia $p\colon p^{-1}(U_i) \to U_i$ są rozwłóknieniami, to p jest rozwłóknieniem. W szczególności jeśli $p\colon E \to B$ jest przekształceniem lokalnie trywialnym, a B jest parazwarta (np. metryzowalna), to p jest rozwłóknieniem.*

5.1.5 Relatywne homotopijne równoważności i włókniste homotopijne równoważności

Zaczniemy od uwag ogólno-kategoryjnych.

Definicja 12. *Niech $\mathcal{C}$ będzie kategorią, a A ustalonym jej obiektem.*

Kategorią $\mathcal{C}^A$, kategorią "pod A", nazywamy kategorię której obiektami są morfizmy $A \to X$ a morfizmami przemienne diagramy

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[dl, "i"'] \arrow[dr, "j"] & \\ X \arrow[rr, "f"'] & & Y. \end{tikzcd}$$

Analogicznie kategorią $\mathcal{C}_A$, kategorią "nad A", nazywamy kategorię której obiektami są morfizmy $X \to A$ a morfizmami przemienne diagramy

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "p"'] & & Y \arrow[dl, "q"] \\ & A & \end{tikzcd}$$

Dla dowodu następnych dwóch bardzo ważnych twierdzeń rozpatrzymy powyższe konstrukcje w kategorii $\mathcal{T}_h$. Konstrukcje, sformułowania twierdzeń są dualne, ale ze względu na ich wagę podamy pełne dowody w obu przypadkach. Zaczyniemy od korozwłóknień.

Relatywne homotopijne równoważności.

Dla ustalonej przestrzeni A rozważmy kategorię $\mathcal{T}^{cofA}$ bedącą podkategorią w $\mathcal{T}^A$ składającą się z korozwłoknień. Jeżeli $f : X \to Y$ jest przekształceniem takim, że diagram

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[dl, "i"'] \arrow[dr, "j"] & \\ X \arrow[rr, "f"'] & & Y \end{tikzcd}$$

jest przemienny, odwzorowania i , j są korozwłóknieniami to mówimy że f jest przekształceniem $\operatorname{rel} A$. W kategorii $\mathcal{T}^A$ mamy relację homotopii przekształceń $\operatorname{rel} A$ i odpowiednie kategorie homotopii oznaczamy $(\mathcal{T}^{cofA})_h \subset (\mathcal{T}^A)_h$. Funktor zapominania $\mathcal{T}^A \to \mathcal{T}$ indukuje funktor zapominania na odpowiednich kategoriach homotopii.

Celem naszym jest następujące twierdzenie:

Twierdzenie 13. *Jeśli funktor zapominania przeprowadza pewien morfizm w kategorii $(\mathcal{T}^{cofA})_h$ na izomorfizm w $\mathcal{T}_h$, to jest on izomorfizmem w $(\mathcal{T}^{cofA})_h$. Innymi słowy, jeżeli w diagramie przemiennym przestrzeni topologicznych*

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[dl, "i"'] \arrow[dr, "j"] & \\ X \arrow[rr, "f"'] & & Y \end{tikzcd}$$

odwzorowania i , j są korozwłóknieniami a f homotopijną równoważnością to f jest homotopijną równoważnością $\operatorname{rel}(A)$.

Dowód twierdzenia poprzedzimy kilkoma lematami.

Lemat 1. *Jeśli $A \to iX$ oraz $A \to jY$ są korozwłóknieniami i diagram*

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[dl, "i"'] \arrow[dr, "j"] & \\ X & & Y' \arrow[ll, "g"'] \end{tikzcd}$$

jest przemienny z dokładnością do homotopii, $i \sim g'j$, to istnieje $g \sim g'$, dla którego diagram

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[dl, "i"'] \arrow[dr, "j"] & \\ X & & Y \arrow[ll, "g"'] \end{tikzcd}$$

jest przemienny, czyli $i = gj$.

Dowód. Niech $H : A \times I \to X$ będzie homotopią, $H(a, 0) = g'j(a)$. Ta homotopia, wraz z przekształceniem $g' \colon Y \to X$ - dzięki temu, że j jest korozwłóknieniem - rozszerza się do homotopii $\bar{H} \colon Y \times I \to X$, takiej, że $\bar{H}(y, 0) = g'(y)$ oraz $\bar{H}(j(a), 1) = i(a)$, a więc $g_1 := \bar{H}(-, 1)$ jest szukanym przekształceniem. □

Wniosek 5. *Jeśli $A \to iX$ oraz $A \to jY$ są korozwłóknieniami a w diagramie*

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[dl, "i"'] \arrow[dr, "j"] & \\ X \arrow[rr, "f"'] & & Y \end{tikzcd}$$

przekształcenie f jest zwykłą homotopijną równoważnością, to istnieje przekształcenie

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[dl, "i"'] \arrow[dr, "j"] & \\ X & & Y \arrow[ll, "g"'] \end{tikzcd}$$

takie, że $gf \sim id_X$

Dowód. Niech $g' : Y \to X$ będzie homotopijną odwrotnością do f. Wówczas $fi = j$ i $i \sim g'fi = g'j$. Poprzedni lemat zastosowany do g' daje tezę. □

Mamy więc przekształcenie $\operatorname{rel} A$, które jest homotopijną odwrotnością do f, ale homotopie z id_X i id_Y nie muszą być $\operatorname{rel} A$. Następujący lemat charakteryzuje przekształcenia $\operatorname{rel} A$, homotopijne z id_X.

Lemat 2. *Niech $i : A \to X$ będzie korozwłóknieniem. Jeżeli $h : X \to X$ jest przekształceniem $\operatorname{rel} A$ i $h \sim id_X$, niekoniecznie $\operatorname{rel} A$, to istnieje przekształcenie $e : X \to X$ $\operatorname{rel} A$ i takie, że $ef \sim id_X$ $\operatorname{rel} A$. Innymi słowy jeżeli h jest identycznością w $\mathcal{T}_h$, to h ma lewą odwrotność w $(\mathcal{T}^{cofA})_h$.*

Dowód. Niech $H : X \times I \to X$ będzie homotopią, $H(\circ, 0) = h$, $H(\circ, 1) = id_X$. Ponieważ h jest $relA$ oraz i jest korozwłóknieniem, to obcięcie $H \circ (i \times id) : A \times I \to X$ rozszerza się do $K \colon X \times I \to X$, ale tym razem z warunkiem początkowym id_X, czyli takiej, że $K(x, 0) = x$ oraz $K(i(a), 1) = a$. Wówczas $e := K(\circ, 1)$ jest przekształceniem $\operatorname{rel}(A)$ homotopijnym z id_X.

Udowodnimy, że jest szukaną lewą odwrotnością, konstruując homotopię $ef \sim id_X$ rel(A).

Rozważmy kompozycję dwóch homotopii: $G_0 := H^{-1} * K \circ (f \times id) : X \times I \to X$. Z definicji homotopii H, K wynika, że dla każdego $a \in A$ droga $G_0(j(a), -) = H^{-1}(j(a), -) * H(j(a), -)$ jest kanonicznie homotopijna ze stała. Definiujemy więc (podwójną) homotopię $G : A \times I \times I \to X$ taką, że $G(a, t, 0) = G_0(a, t)$ oraz $G(a, 0, t) = G(a, 1, t) = G(a, t, 1) = i(a)$. Homotopię tę rozszerzamy do $\bar{G} : X \times I \times I \to X$ z warunkiem początkowym danym G_0. Szukana homotopia $ef \sim id_X$ rel(A) dana jest jako kompozycja obcięć homotopii $\bar{G}$ do trzech boków kwadratu: $(\bar{G}|X \times 0 \times I) * (\bar{G}|X \times I \times 1) * (\bar{G}|X \times 1 \times I)^{-1}$. □

Zatrzymamy się w tym miejscu w dowodzie twierdzenia i przejdziemy do rozwłóknień:

Włókniste homotopijne równoważności.

Dla ustalonej przestrzeni B rozważmy kategorię $\mathcal{T}_{fibB}$ bedącą podkategorią w $\mathcal{T}_B$ składającą się z rozwłoknień. Jeżeli $f : E \to E'$ jest przekształceniem takim, że diagram

$$\begin{tikzcd} E \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "p"'] & & E' \arrow[dl, "p'"] \\ & B & \end{tikzcd}$$

jest przemienny, odwzorowania p, p' są rozwłóknieniami to mówimy że f jest przekształceniem włóknistym. W kategorii $\mathcal{T}_{fibB}$ mamy relację homotopii przekształceń włóknistych i odpowiednie kategorie homotopii oznaczamy $(\mathcal{T}_{fibB}h \subset \mathcal{T}_h$. Funktor zapominania $\mathcal{T}_{fibB} \to \mathcal{T}$ indukuje funktor zapominania na odpowiednich kategoriach homotopii.

Analogiczie jak poprzednio, celem naszym jest twierdzenie:

Twierdzenie 14. *Jeśli w diagramie przemiennym przestrzeni topologicznych*

$$\begin{tikzcd} E \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "p"'] & & E' \arrow[dl, "p'"] \\ & B & \end{tikzcd}$$

odwozrowania p ,p' są rozwłóknieniami a odwzorowanie f jest (zwykłą) homotopijną równoważnością, to f jest włóknistą homotopijną równoważnością.

Lemat 3. *Jeśli klasa morfizmów $\mathcal{M}$ w kategorii $\mathcal{C}$ jest zamknięta ze względu na złożenia i każdy morfizm w $\mathcal{M}$ ma w $\mathcal{M}$ lewostronną (odp. prawostronną) odwrotność, to każdy morfizm w $\mathcal{M}$ jest izomorfizmem.*

Dowód. Dla każdego morfizmu $f \in \mathcal{M}$ istnieje $g \in \mathcal{M}$ taki, że $gf = id$. Z założenia istnieje $f' \in \mathcal{M}$ taki, że $f'g = id$. Ponieważ lewo- i prawostronna odwrotność muszą byc równe, mamy $f = f'$ a stąd g jest obustronną odwrotnością f. □

Lemat 4. *Niech $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ będzie funktorem. Załóżmy, że dla każdego endmorfizmu $e \in \mathcal{C}$ takiego, że $F(e) = id$ istnieje lewa (odp. prawa) odwrotność w $\mathcal{C}$. Wtedy dla dowolnego morfizmu $f \in \mathcal{C}$ takiego, że istnieje $g \in \mathcal{C}$ takie, że $F(gf) = id$ w $\mathcal{D}$ istnieje lewa (odp. prawa) odwrotność w $\mathcal{C}$.*

Dowód. Rozważmy endomorfizm $gf \in \mathcal{C}$. Na mocy założenia istnieje $e' \in \mathcal{C}$ taki, że $e'(gf) = id$. Stąd $e'g$ jest lewą odwrotnością morfizmu $f \in \mathcal{C}$. □

Wniosek 6. *Jeśli $A \subset X$ jest acyklicznym korozwłóknieniem, to A jest silnym retraktem deformacyjnym X.*

Dowód. Stosujemy poprzednie twierdzenie do diagramu:

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[dl, "id"'] \arrow[dr, "i"] & \\ A \arrow[rr, "i"'] & & X \end{tikzcd}$$

□

Zachodzi także następująca wersja Tw.13 dotycząca morfizmów między dwoma korozwłóknieniami zdefiniowanymi na różnych przestrzeniach.

Twierdzenie 15. *Jeśli w diagramie*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "g"] \arrow[d, "i"'] & B \arrow[d, "j"] \\ X \arrow[r, "f"] & Y. \end{tikzcd}$$

i, j są korozwłóknieniami, a f oraz d są homotopijnymi równoważnościami, to (f, d) jest homotopijną równoważnością par.

Dowód. Dowody odpowiedników lematów 1-3 poprzedzających dowód Tw. 13 pozostawiamy jako ćwiczenie. Wykażemy, że jeśli $f \simeq id_E$ jest włóknistym endomorfimem rozwłóknienia $E \to pB$, to jest f posiada prawą włóknistą homotopijną odwrotność. Niech $\tilde{H} : E \times I \to E$ homotopią między f a id. Żeby skonstruować włoknistą prawą homotopijną odwrotność f rozpatrzmy pdniesienie $\tilde{G} : E \times I \to E$ homotopii $G := p\tilde{H} : E \times I \to B$ z warunkiem początkowym $E \times 0 \to idE$. Zdefiniujmy $g(e) := \tilde{G}(e, 1)$; wykażemy, że $id \sim_B fg$.

Zdefiniujmy homotopię $\tilde{K}_0 := \tilde{H}^{-1} * (f \circ \tilde{G}) : id \sim fg$ i rozważmy $p\tilde{K} = H^{-1} * G$. Ta homotopia rozszerza się na kwadrat do homotopii $K : E \times I \times I \to$

B takiej, że $K(e,t,0) = K_0(e,t)$ oraz $K(e,0,t) = K(e,1,t) = K(e,t,1) = p(e)$. Podnieśmy ją do $\tilde{K} : E \times I \times I \to E$ z warunkiem poczatkowym $\tilde{K}_0 : E \times 0 \to E$. Kompozycja homotopii otrzymanych przez obcięcie $\tilde{K}$ do trzech "wolnych" boków kwadratu definiuje homotopię $id \sim_B fg$ (p.dowód tw. 0.1). □

Twierdzenie 16. *Jeśli $E \to pB$ jest rozwłóknieniem oraz $X \to fB$ dowolnym przekształceniem, to pull-back $f^*E \to p'X$ jest rozwłóknieniem.*

Twierdzenie 17. *Niech $E \to pB$ będzie rozwłóknieniem. Każda homotopia $X \times I \to FB$ wyznacza klasę homotopijnych równoważności rozwłoknień indukowamych $f_0^*E \sim_X f_1^*E$, przy czym homotopii trywialnej odpowiada identyczność, a kompozycji homotopii odpowiada złożenie równoważnosci. Dwa przekształcenia $F_0, F_1 : X \times I \to B$ homotopijne* $\mathrm{rel}(X \times \{0,1\})$ *wyznaczają tę sama klasę włóknistych równoważności*

Dowód. Przy pomocy homotopii F mozna przeciągnąć rozwłóknienie p nad walec $X \times I$; wystarczy więc pokazać jak rozwłóknienie $E \to pX \times I$ wyznacza włóknistą homotopijną równoważność obcięć do dolnej i górnej podstawy. Oznaczmy dla $k = 0,1$ przez $E_k := p^{-1}(E \times \{k\}) = i_k^*E$. Utożsamienie E_0 z E_1 polega na "przeniesieniu" włókien E_0 wzdłuż tworzących walca do E_1.

Zdefiniujmy homotopię $E_0 \times I \to p_0 \times idX \times I$ i jej podniesienie $\tilde{P} : E_0 \times 0 \to E$ z warunkiem początkowym $E_0 \times 0 \subset E$. Oczywiście, dla każdego $t \in I$ mamy $\tilde{P}(-,t) : E_0 \times 1 \to E_t$. Kompozycji homotopii można przyporządkować złożenie tych przekształceń. Trzeba sprawdzić, że klasa włoknistej homotopii nie zależy od wyboru podniesienia $\tilde{P}$. Wykażemy od razu więcej - że dwa przekształcenia $F_0, F_1 : X \times I \to B$ homotopijne $\mathrm{rel}(X \times \{0,1\})$ wyznaczają tę sama klasę włóknistych równoważności. Niech $g_0 : E_0 \times I \to F_0^*E$ oraz $g_1 : E_0 \times I \to F_1^*E$ będą homotopiami skontruowanymi według powyższego przepisu. Rozważmy homotopię $F : F_0 \sim F_1 \,\mathrm{rel}(X \times \{0,1\})$ i rozwłóknienie przeciągniete $F^*E \to X \times I \times I$ oraz homotopię

$$p_0 \times id \times id : E_0 \times I \times I \to X \times I \times I.$$

Podnosząc $H := p_0 \times id \times id$ z warunkiem początkowym określonym na "korytku":

$$\tilde{H}_{I \times 0} : E_0 \times I \times 0 \to E, \;\; \tilde{H}_{I \times 0}(e,t,0) = e \in E_0 \subset F^*E$$

$$\tilde{H}_{0 \times I} : E_0 \times 0 \times I \to E, \;\; \tilde{H}_{0 \times I}(e,0,t) = g_0(e,t) \in F_0^*E \subset F^*E$$

$$\tilde{H}_{1 \times I} : E_0 \times 1 \times I \to E, \;\; \tilde{H}_{1 \times I}(e,1,t) = g_1(e,t) \in F_1^*E \subset F^*E$$

otrzymujemy homotopię $\tilde{H} : E_0 \times I \times I \to E$, której obcięcie $\tilde{H}|E_0 \times 1 \times I$ zadaje szukaną włóknista homotopię. □

Wniosek 7. *Niech $p : E \to B$ bedzie rozwłóknieniem. Istnieje funktor z grupoidu podstawowego $\mathcal{G}(B)$ przestrzeni B do kategorii homotopii przestrzeni topologicznych przypisujący każdemu punktowi $b \in B$ włokno nad nim $p^{-1}(b)$ a klasie homotopii drogi $\omega : I \to B$ klasę homotopii $h_{[\omega]} : p^{-1}(\omega(0)) \to p^{-1}(\omega(1))$*

Dowód. Traktujemy drogę $\omega : I \to B$ jako homotopię między włożeniami punktów końcowych i stosujemy twierdzenie 6 □

Wniosek 8. *Jeśli $p : E \to B$ jest rozwłóknieniem, to istnieje włóknista homotopijna równoważność $E \sim_B P_p$, gdzie $P_p \to B$ jest kocylindrem odwzorowania p. W szczegolności dla każdego puntu $b \in B$ włókno $p^{-1}(b)$ i homotopijne włokno $Fib\,(f, b)$ są homotopijnie równoważne.*

Dowód. Z konstrukcji kocylindra wiemy, że istnieje przekształcenie włókniste $s : E \to P_p$, które jest zwykłą homotopijną równoważnością. Skoro p jest rozwłóknieniem, z twierdzenia 14 wynika, że s jest włóknistą homotopijną równoważnością. □

5.1.6 Korozwłóknienia, rozwłóknienia i homotopijne równoważności

Trzy klasy przekształceń: rozwłóknienia, korozwłóknienia i homotopijne równoważności w pewnym sensie "generują" wszystkie przekształcenia i są między sobą powiązane. Wprowadśmy nastepujące oznaczenia klas morfizmów w $\mathcal{T}$:

1. Cof – korozwłóknienia;
2. Fib – rozwłóknienia;
3. Eq – homotopijne równoważności.

(Ko-)rozwłoknienia, które są jednocześnie homotopijnymi równoważnościami nazywamy *acyklicznymi* i stosujemy oznaczenia: $ACf := Cof \cap Eq$ oraz $AFb := Fib \cap Eq$. Następne twierdzenie opisuje jak klasa Eq i każda z dwóch klas Fib i Cof wyznacza trzecią.

Twierdzenie 18. *Zachodzą następujące równości klas przekształceń:*

1. $Fib = ACof^{\perp}$
2. $AFib = Cof^{\perp}$
3. $Cof = {}^{\perp}AFib$
4. $ACof = {}^{\perp}Fib$

gdzie $(\cdot)^{\perp}$ *(odp.* ${}^{\perp}(\cdot)$*) oznacza klasę odwzorowań prostopadłych z prawej (odp. z lewej) strony do klasy* $(\cdot)$*. [p. Rozdział 1.5]*

Dowód. [1.] $ACof^{\perp} = Fib$ Ponieważ walec $i_0 \colon X \subset X \times I$ należy do ACf, więc $ACf^{\perp} \subset Fib$. Ponieważ dowolne rozwłóknienie jest prawo ortogonalne do walca, a dowolne acykliczne korozwłoknienie jest retraktem walca, więc ponieważ klasa $ACf^{\perp}$ jest zamknięta na retrakty mamy także $ACf^{\perp} \supset Fib$.

[2.]$Cof^{\perp} = AFib$ Ponieważ walec $i_0 \colon X \subset X \times I$ należy do Cof, więc $Cof^{\perp} \subset Fib$. Trzeba sprawdzić, że dowolne odwzorowanie $p : E \to B \in Cof^{\perp}$ jest homotopijną równoważnością. Ponieważ dowolne acykliczne rozwłóknienie jest retraktem kowalca $p_0 : P(Y) \to Y$, więc mamy też inkluzję $Cof^{\perp} \supset AFb$.

[3.] $Cof = {}^{\perp}AFb$ Ponieważ każde korozwłóknienie jest lewo ortogonalne do kowalca, jest też lewo ortogonalne do dowolnego acyklicznego rozwłóknienia. Mamy więc $Cof \subset {}^{\perp}AFb$ Odwrotna inkluzja wynika z definicji korozwłoknienia.
[4.]$ACof = {}^{\perp}Fib$ Walec należy do ${}^{\perp}Fib$ i do ACf, a ponieważ dowolne acykliczne korozwłóknienie jest jego retraktem, więc $ACf \subset {}^{\perp}Fib$. Odwrotnie, niech $j \in^{\perp} Fib$. Wtedy j jest korozwłóknieniem. Trzeba pokazać, że jest homotopijną równoważnością....

$\square$