ZADANIA Z GEOMETRII Z ALGEBRĄ LINIOWĄ

grupa 2, semestr zimowy 2018/19

1 ROZWIĄZYWANIE UKŁADÓW RÓWNAŃ LINIOWYCH

1.1 Zadania na ćwiczenia:

1.1. Rozwiązać układ równań:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 8x_1 & + & 6x_2 & + & 5x_3 & + & 2x_4 & = & 21 \\ 3x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & = & 10 \\ 4x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & + & x_4 & = & 8 \\ 3x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 15 \\ 7x_1 & + & 4x_2 & + & 5x_3 & + & 2x_4 & = & 18 \end{array}$$

1.2. Rozwiązać układ równań:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} -9x_1 & + & 10x_2 & + & 3x_3 & + & 7x_4 & = & 7 \\ -4x_1 & + & 7x_2 & + & x_3 & + & 3x_4 & = & 5 \\ 7x_1 & + & 5x_2 & - & 4x_3 & - & 6x_4 & = & 3 \end{array}$$

1.3. Rozwiązać układ równań o macierzy:

$$\left.\begin{array}{rrrrr|r} 6 & 4 & 5 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & -2 & 1 & 0 & -7 \\ 9 & 6 & 1 & 3 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 4 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right.$$

1.4. Rozpatrzmy układ równań o współczynnikach rzeczywistych:

$$\begin{array}{ccccccccl} \lambda x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = 1 \\ x_1 & + & \lambda x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = 1 \\ x_1 & + & x_2 & + & \lambda x_3 & + & x_4 & = 1 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & \lambda x_4 & = 1 \end{array}$$

Przedyskutować jego rozwiązania w zależności od wartości parametru λ.

1.5. Wykazać, że następujące układy równań mają jednoznaczne rozwiązanie modulo dowolna liczba pierwsza, z wyjątkiem skończonej ich liczby. Dla tych liczb pierwszych znaleźć rozwiązanie.

$$\begin{array}{rcrcrl} x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & = 2 \\ 2x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & = 1 \\ 2x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccccl} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & & = 1 \\ x_1 & + & x_2 & & & + & x_4 & = 1 \\ x_1 & & & + & x_3 & + & x_4 & = 1 \\ & & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = 1 \end{array}$$

1.2 Praca domowa - seria I do oddania 9 października

1.6. Niech a, b, c będą trzema różnymi liczbami rzeczywistymi. Znaleźć wielomian kwadratowy $W(x) = \lambda x^2 + \mu x + \nu$, taki, że $W(a) = 7$, $W(b) = 4$ i $W(c) = 9$.

1.7. Rozwiązać układy równań w zależności od $a, b \in \mathbb{R}$:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 4x_1 & + & 8x_2 & - & 3x_3 & + & ax_4 & = & b+1 \\ 2x_1 & + & 4x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & = & 1 \\ 3x_1 & + & 6x_2 & - & 2x_3 & + & ax_4 & = & b \end{array}$$

1.8. Dana jest macierz $A \in M_{3\times 5}(\mathbb{R})$:

$$\begin{bmatrix} a & 2 & b & 3 & 2 \\ c & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & d & e & 3 & f \end{bmatrix}.$$

Z macierzy A za pomocą jednej operacji elementarnej na wierszach można otrzymać macierz w postaci schodkowej zredukowanej. Znaleźć liczby a, b, c, d, e, f.

1.3 Liga zadaniowa - seria I

1.9. Rozpatrzeć rozwiązania układu równań analogicznego do tego z zad. 1.4 dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$

1.10. a) Jakie są warunki konieczne i dostateczne na to by w niesprzecznym układzie równań o n niewiadomych k - ta zmienna, $1 \leq k \leq n$ przyjmowała zawsze tę samą wartość dla każdego rozwiązania tego układu?

b) Jakie są warunki konieczne i dostateczne na to by w niesprzecznym układzie równań o n niewiadomych k - ta zmienna, $1 \leq k \leq n$ przyjmowała zawsze wartość 0 dla każdego rozwiązania tego układu?

2 CIAŁA

Definicja. *Niech K będzie ciałem. Najmniejszą liczbę naturalną $n \in N$ dla której $\underbrace{1+1+\cdots+1}_{n} = 0$ nazywamy charakterystyką ciała K. Jeżeli taka liczba nie istnieje, to mówimy, że ciało K jest charakterystyki* 0.

2.1. Pokazać, że charakterystyka ciała jest zerem lub liczbą pierwszą.

2.2. Pokazać, że ciało charakterystyki p, $p > 0$ zawiera ciało $\mathbb{Z}_p$, a ciało charakterystyki 0 ciało liczb wymiernych $\mathbb{Q}$.

2.3. Określić działanie dodawania i mnożenia w zbiorze czteroelementowym tak, by otrzymać ciało.

2.4. Pokazać, że w ciele $\mathbb{Z}_p$ dla każdego elementu $c \in \mathbb{Z}_p$ istnieją a, b dla których $a^2 + b^2 = c$.

2.5. Niech K będzie ciałem charakterystyki p, gdzie p jest liczbą pierwszą. Pokazać, że jeżeli dla $a, b \in K$, $a^p = b^p$, to $a = b$.

2.6. Pokazać, że jeżeli K jest ciałem skończonym charakterystyki p, to przekształcenie $a \to a^p$ jest automorfizmem ciała (automorfizmem Frobeniusa).

2.7. Pokazać, że jeżeli $\varphi : K \to K$ jest automorfizmem, to $\{x \in K : \varphi(x) = x\}$ jest podciałem.

2.8. Dla jakich $m, n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ ciała $\mathbb{Q}(\sqrt{m})$ i $\mathbb{Q}(\sqrt{n})$ są izomorficzne?

2.1 CIAŁO LICZB ZESPOLONYCH

2.9. Narysować na płaszczyźnie zespolonej zbiór punktów spełniających warunek:

a) $\begin{cases} 1 \leq |z+1| \leq 2, \\ \frac{\pi}{2} \leq \arg z \leq \pi \end{cases}$

b) $|z + \frac{1}{z}| = 2$

2.10. Obliczyć:

a) $(\frac{1+i}{1-i})^{33} - (1-i)^{10} + \frac{1}{i}$,

b) $(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i})^{30}$

2.11. Obliczyć $E_n = 1 + i + i^2 + i^3 + \cdots + i^n$ dla $i \geq 1$.

2.12. Przedstawić w formie trygonometrycznej:

a) $(i+1)(i-2)$,

b) $\frac{1}{1+i}$,

c) $2 + i \sin \frac{\pi}{2}$,

d) $1 - \sin\alpha + i\cos\alpha$,$0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$

e) $-2 + 2\sqrt{3}i$

2.13. Niech $z = \cos\phi + i\sin\phi$, $0 \le \phi \le 2\pi$. Znaleźć argument liczby :

a) $z^2 + z$,

b) $z^2 - z$,

c) $z + \bar{z}$

2.14. Obliczyć $z^{2018} + \frac{1}{z^{2018}}$ wiedząc, że $z + \frac{1}{z} = 1$

2.15. Korzystając ze wzorów de Moivre'a pokazać, że

a) $\sin 4\phi = 8\cos^3\phi\sin\phi - 4\cos\phi\sin\phi$

b) $\cos 4\phi = 8\cos^4\phi - 8\cos^2\phi + 1$

c) $\sin\phi + \sin 2\phi + \sin 3\phi + ... + \sin n\phi = \frac{\sin\frac{n\phi}{2}\sin\frac{(n+1)\phi}{2}}{\sin\frac{\phi}{2}}$

d) $1 + \cos\phi + \cos 2\phi + \cos 3\phi + ... + \cos n\phi = \frac{\cos\frac{n\phi}{2}\sin\frac{(n+1)\phi}{2}}{\sin\frac{\phi}{2}}$

2.16. Przedstawić w postaci $a + bi$, gdzie $a, b \in \mathbb{R}$ liczbę $(\sqrt{3} + i)^{17}$.

2.2 Praca domowa - seria II do oddania 16 października

2.17. Narysować na płaszczyźnie zespolonej zbiór:

$$\{z \in \mathbb{C} : \ \operatorname{Re}\,(\frac{1}{z+1} + \frac{1}{z-1}) > 0\}$$

2.18. Udowodnić, że liczba zespolona $\frac{1-z}{1+z} \in \mathbb{C}$ jest czysto urojona wtedy i tylko wtedy gdy $|z| = 1$

2.19. Dane są liczby zespolone $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$, takie że $|z_1| = \cdots = |z_n| = r$. Udowodnić, że liczba

$$\frac{(z_1 + z_2)(z_2 + z_3)\ldots(z_{n-1} + z_n)(z_n + z_1)}{z_1 \cdot z_2 \cdots z_n}$$

jest rzeczywista.

2.3 Liga zadaniowa - seria II

2.20. Czy istnieje ciało sześcioelementowe?

2.21. Znaleźć wszystkie wielomiany f o współczynnikach w ciele $\mathbb{Z}_5$, dla których

$$f(0) = f(1) = f(4) = 1 \quad f(2) = f(3) = 3.$$

2.4 Liczby zespolone cd.

2.22. Wyznaczyć wszystkie liczby całkowite $k, l, m \in \mathbb{Z}$, dla których

$$(\sqrt{2})^k(-1+i)^l = (\sqrt{3}-i)^m.$$

2.23. Znaleźć pierwiastki stopnia n z liczb:

a) $1+i$, $n=4$

b) $4-4\sqrt{3}i$, $n=5$

2.5 Pierwiastki z jedynki

2.24. Pokazać, że jeżeli z, z' są dwiema liczbami zespolonymi leżącymi na bokach n-kąta foremnego utworzonego przez wszystkie pierwiastki stopnia n z 1, to liczba zz' także leży na pewnym boku tego n-kąta.

2.25. Znaleźć liczbę pierwiastków pierwotnych z jedynki stopnia:

a) 12

b) p^k , gdzie p jest liczbą pierwszą

2.26. Znaleźć:

a) sumę wszystkich pierwiastków stopnia n z 1

b) sumę s-tych potęg wszystkich pierwiastków stopnia n z 1, $s \in Z$

c) iloczyn wszystkich pierwiastków pierwotnych stopnia n z 1

2.27. Niech $\sigma(n)$ oznacza sumę wszystkich pierwiastków pierwotnych stopnia n z 1. Pokazać, że:

a) $\sigma(1) = 1$

b) dla $n > 1$ $\sum_{d|n} \sigma(d) = 0$

c) $\sigma(p) = -1$ jeśli p jest liczbą pierwszą

d) $\sigma(p^k) = 0$ jeśli p jest liczbą pierwszą i $k > 1$

e) jeśli $(r, s) = 1$ to $\sigma(rs) = \sigma(r)\sigma(s)$

2.6 Liczby zespolone a geometria płaszczyzny

2.28. Wykazać, że jeśli $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ i $z_1 + z_2 + z_3 = 0$, to z_1, z_2, z_3 są wierzchołkami trójkąta równobocznego wpisanego w okrąg jednostkowy.

2.29. Niech a, b, c, d będą ustalonymi liczbami zespolonymi. Udowodnić, że liczby zespolone spełniające równanie:

$$a(z-b)^n + c(z-d)^n = 0$$

leżą na pewnym okręgu, lub na pewnej prostej, lub są całą płaszczyzną zespoloną.

2.30. Niech z_1, z_2, z_3, z_4 będą różnymi liczbami zespolonymi, takimi że $|z_1| = |z_2| = |z_3| = |z_4|$. Pokazać, że:

a) $\frac{(z_1-z_2)(z_3-z_4)}{(z_1-z_4)(z_2-z_3)}$ jest liczbą rzeczywistą.

b) zachodzi równość (twierdzenie Ptolomeusza):

$$|z_1 - z_3|\,|z_2 - z_4| = |z_1 - z_2|\,|z_3 - z_4| + |z_1 - z_4|\,|z_2 - z_3|$$

Korzystając z istnienia struktury ciała liczb zespolonych na płaszczyźnie, można udowodnić szereg klasycznych twierdzeń z geometrii. Aby uniknąć skomplikowanych obliczeń w poniższych zadaniach należy dogodnie dobierać współrzędne.

2.31. Pokazać, że środkowe trójkąta przecinają się w jednym punkcie (nazywamy go środkiem ciężkości).

2.32. Znaleźć współrzędne środka okręgu opisanego na trójkącie.

2.7 Praca domowa - seria III do oddania 23 października

2.33. Znaleźć n, dla których $(1+i)^n = (1-i)^n$.

2.34. Wykazać, że jeśli $|z_1| = |z_2| = |z_3| \neq 0$, to $arg\frac{z_3-z_2}{z_3-z_1} = \frac{1}{2}arg\frac{z_2}{z_1}$

2.35. Rozwiązać równanie $z^{4n} - 4z^n - 1 = 0$

2.8 Liga zadaniowa - seria III:

2.36. Rozwiązać w zbiorze liczb zespolonych równanie $(z+a)^n = z^n$, gdzie $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ zaś n jest dowolną liczbą naturalną.

2.37. Niech $a, b, c, d, \alpha \in \mathbb{C}$ będą takimi liczbami zespolonymi, że $|a| = |b| \neq 0$ i $|c| = |d| \neq 0$. Udowodnić, że wszystkie pierwiastki równania

$$c(bx + a\alpha)^n - d(ax + b\bar{\alpha}) = 0, \qquad n \geq 1,$$

są liczbami rzeczywistymi.

2.38. Niech $M \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$ będzie zbiorem liczb zespolonych takim że jeżeli $x, y \in M$, to $\frac{x}{y} \in M$. Udowodnić, że jeżeli zbiór M ma n elementów, to M jest zbiorem pierwiastków stopnia n z 1.

3 Przestrzenie liniowe, podstawowe definicje.

3.1. Niech S zbiór, a k ciało. Niech $V = \{f : S \to k\}$. Które z pod zbiorów są podprzestrzeniami V?

a) $\{f : f(s_0) = 0\}$, gdzie $s_0 \in S$ pewien punkt

b) $\{f : f(s_0) = 1\}$, gdzie $s_0 \in S$ pewien punkt

c) $\{f : \forall_{s \in S'} \quad f(s) = 0\}$, gdzie $S' \subseteq S$ jest podzbiorem.

d) $\{f : \exists_{s \in S'} \quad f(s) = 0\}$, gdzie $S' \subseteq S$ jest podzbiorem.

e) $k = \mathbb{R}$ lub $k = \mathbb{C}$ i $\{f : f(x) \to 0$ przy $|x| \to \infty\}$.

d) $k = \mathbb{R}$ lub $k = \mathbb{C}$ i $\{f : f(x) \to 1$ przy $|x| \to \infty\}$.

3.2. Rozpatrujemy $\mathbb{R}$ jako przestrzeń liniową nad $\mathbb{Q}$. Czy podzbiór $\mathbb{R}$ złożony z liczb postaci $a + b\pi$, $a, b \in \mathbb{Q}$ jest podprzestrzenią liniową? Czy podzbiór ten jest podciałem w $\mathbb{R}$?

3.3. W przestrzeni liniowej funkcji $\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$ wykazać liniową niezależność wektorów:

a) 1, $\sin x$, $\cos x$

b) x,x^2 ,...,x^k

c) $\sin x$, $\sin 2x$, $\sin 3x$,...,$\sin kx$

3.4. Dane są wektory $\alpha_1 = (1, 0, 0, 1)$,$\alpha_2 = (0, 3, 1, 1)$,$\alpha_3 = (1, 3, 5, 0)$ w $\mathbb{R}^4$.

a) Sprawdzić, czy układ jest linowo niezależny.

b) Dopełnić go do bazy w $\mathbb{R}^4$.

3.5. Niech $V = \mathbb{C}^4$. Czy wektor $(1, i, 2i, 0) \in \mathrm{lin}\{(1, 1, i, 0), (0, i, 1, 0)\}$?

3.1 Praca domowa - seria IV do oddania 6 listopada

(zadania 3.6 – 3.10)

3.6. Na płaszczyźnie zespolonej narysować zbiór

$$\left\{ z \in \mathbb{C} \colon \ \mathrm{Re}\left(\frac{1+i}{z^2} + \frac{1}{\overline{z}^2} \right) > 0 \right\}$$

3.7. Niech X będzie zbiorem. W zbiorze 2^X wszystkich podzbiorów określamy dodawanie i mnożenie przez elementy ciała $\mathbb{Z}_2$:

$$A + B = (A \cup B) \setminus (A \cap B) \qquad 1A = A, 0A = \emptyset$$

a) Udowodnić, że dostajemy przestrzeń liniową nad $\mathbb{Z}_2$.

b) Niech $Y \subseteq X$. Czy zbiór $\{A \in 2^X : A \cap Y = \emptyset\}$ jest podprzestrzenią? A zbiór $\{A \in 2^X : A \cap Y \neq \emptyset\}$?

c) Czy zbiór $A_{ev} \subset 2^X$ podzbiorów skończonych o parzystej liczbie elementów stanowi podprzestrzeń? A zbiór $A_{odd} \subset 2^X$ podzbiorów o nieparzystej liczbie elementów?

d) Znaleźć $\mathrm{lin}(A_{ev})$ i $\mathrm{lin}(A_{odd})$.

e) Udowodnić, że jeśli $A_1 \neq \emptyset$, $A_1 \subset A_2 \subset \cdots \subset A_n$ jest ciągiem ściśle rosnącym, to $A_1, A_2, \ldots, A_n$ są wektorami liniowo niezależnymi.

f) Udowodnić, że jeśli wśród zbiorów $A_1, A_2, \ldots A_n$ żaden nie jest zawarty w sumie pozostałych, to $A_1, A_2, \ldots A_n$ są wektorami liniowo niezależnymi.

3.8. Niech funkcje $f_1(x) = |x-1|$, $f_2(x) = |x-2|$, $f_3(x) = |x-3|$ będą elementami przestrzeni liniowej $F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ wszystkich funkcji z $\mathbb{R}$ w $\mathbb{R}$. Wykazać, że układ f_1, f_2, f_3 jest liniowo niezależny.

3.9. Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem K, zaś $A \subset V$ jej podzbiorem. Niech $\alpha, \beta \in V$, $\alpha \neq \beta$. Przypuśćmy, że $\alpha \notin \mathrm{lin}(A)$, ale $\alpha \in \mathrm{lin}(A \cup \{\beta\})$. Czy wynika z tego, że $\mathrm{lin}(A \cup \{\beta\}) = \mathrm{lin}(A \cup \{\alpha\})$? Starannie uzasadnij odpowiedź.

3.10. Załóżmy, ze przestrzeń wektorowa V nad ciałem K da się zapisać jako suma $V = V_1 \cup \cdots \cup V_n$ podprzestrzeni właściwych $V_1, \ldots, V_n \leqslant V$. Pokaż, że wtedy $|K| < n$.

4 Baza przestrzeni liniowej

4.1. Znaleźć współczynniki wielomianu $t^5 - t^4 + t^3 - t^2 - t + 1$ w bazie przestrzeni wielomianów stopnia ≤ 5: $1, t+1, t^2+1, t^3+1, t^4+1, t^5+1$

4.2. Znaleźć bazy podprzestrzeni liniowych przestrzeni $\mathbb{R}^5$ opisanych przez równania:

a)

$$x + y + z + t + s = 0;$$

b)

$$\begin{array}{rcrcrcrcrl} x & - & y & + & z & - & 2s & + & t & = 0 \\ 3x & + & 4y & - & z & + & s & + & 3t & = 0. \\ x & - & 8y & + & 5z & - & 9s & + & t & = 0 \end{array}$$

4.3. Podać bazę podprzestrzeni k^{2n} opisanej $n+1$ równaniami:

$$\begin{gathered} x_1 + x_2 + x_3 + \ldots.. + x_n = 0 \\ x_2 + x_3 + \ldots.. + x_n + x_{n+1} = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{n+1} + x_{n+2} + \ldots + x_{2n} = 0 \end{gathered}$$

4.4. Znaleźć bazę podprzestrzeni liniowej wielomianów spełniających:
a) $f(1) = f(2) = 0$;
b) $f^{(3)}(7) = 0$ (trzecia pochodna).

4.5. Wykazać, że jeśli $\chi(\mathbb{F}) \neq 2$ to dla dowolnych wektorów $v, w \in V$ zachodzi $\mathrm{lin}(v + w, v - w) = \mathrm{lin}(v, w)$.

4.6. Rozważmy wektory $v_1 = (0, 1, 0, 1, 0)$, $v_2 = (7, 4, 1, 8, 3)$, $v_3 = (0, 3, 0, 4, 0)$, $v_4 = (1, 9, 5, 7, 1)$, $v_5 = (0, 1, 0, 5, 0)$ w przestrzeni liniowej $\mathbb{Q}^5$. Czy istnieją liczby wymierne $a_{ij} \in \mathbb{Q}$, $1 \leq i, j \leq 5$,dla których podzbiór $\{\sum_{j=1}^{5} a_{ij} v_j : 1 \leq i \leq 5\}$ jest liniowo niezależny. Starannie uzasadnij odpowiedź.

4.7. W przestrzeni liniowej $\mathbb{R}^n$ dane są wektory $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$. Pokazać,że jeżeli $m \geq n + 2$, to istnieją liczby rzeczywiste $a_1, \ldots, a_n$ nie wszystkie równe 0, takie że $\sum_{i=1}^{m} a_i \alpha_i = 0$ i $\sum_{i=1}^{m} a_i = 0$. P

4.8. Niech $\alpha_1 = (1, 3, 1)$, $\alpha_2 = (2, 2, 1)$, $\beta = (-3, 0, 1)$. Znaleźć (jeśli istnieje) taki wektor α_3, że układ α_1, α_2, α_3 jest bazą $\mathbb{R}^3$ i wektor β ma w tej bazie współrzędne 2,-3, 1.
b) to samo polecenie gdy $\beta = (3, 5, 2)$.

4.9. Niech $\alpha_1, ...\alpha_n$ będzie baza przestrzeni liniowej V nad ciałem K, zaś $W \leqslant V$ jej podprzestrzenią k wymiarowa. Pokazać, że dla dowolnych $\alpha_{i_1}, ...\alpha_{i_m}$, $m > n-k$ istnieje wektor $\beta \in W$, $\beta \neq 0$, który jest kombinacją liniową wektorów $\alpha_{i_1}, ...\alpha_{i_m}$.

4.10. Niech V będzie przestrzenią $n-$ wymiarową nad ciałem K i niech $\alpha_1, \ldots \alpha_{n-1}$ będzie układem liniowo niezależnym. Niech $a_1, \ldots a_n \in K$ i niech $\beta \in V$. Znaleźć warunki konieczne i dostateczne na to, by istniał wektor α_n, taki by $\alpha_1, \ldots \alpha_n$ był bazą V i $a_1, \ldots a_n$ był ciągiem współrzędnych wektora β w tej bazie. Zbadać jednoznaczność rozwiązania.

4.11. Dane wektory w $\mathbb{R}^3$: $\alpha_1 = (1, 1, 1)$, $\alpha_2 = (1, 2, 3)$, $\beta_1 = (1, -1, 1)$, $\beta_2 = (4, 1, 2)$. Opisać (znaleźć bazę i opisać równaniami) $\mathrm{lin}(\alpha_1, \alpha_2) \cap \mathrm{lin}(\beta_1, \beta_2)$.

4.12. Niech $W \subset \mathbb{R}^4$ będzie opisane przez równania $x_1 + x_2 + x_4 = 0$ i $x_3 - x_4 = 0$. Znaleźć równanie przestrzeni rozpiętej przez W i wektor $(1, 1, 1, 2)$.

4.13. Sprawdzić, że $\{(a_1, .., a_{k-2}, a_{k-1}, a_k, ...) : a_{k-2} + a_{k-1} = a_k \text{ dla } k > 3\}$, jest podprzestrzenią w przestrzeni $k^{\mathbb{N}}$ wszystkich ciągów o wyrazach z k. Znaleźć jej wymiar.

4.14. (A.Salwa - kolokwium) Niech K będzie ciałem. Dla dowolnego $\alpha = (x_1, \ldots, x_n) \in K^n \setminus \{0\}$ definiujemy $p(\alpha) := i$, gdy $x_1 = \cdots = x_{i-1} = 0$ i $x_i \neq 0$. Niech $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ będzie bazą przestrzeni K^n. Udowodnić, że istnieje baza $\beta_1, \ldots, \beta_n$ przestrzeni K^n, taka że dla każdego $1 \leq i \leq n$, $\beta_i \in \mathrm{lin}\{\alpha_1, \ldots, \alpha_i\}$ oraz liczby $p(\beta_1), \ldots, p(\beta_n)$ są parami różne.

4.15. Udowodnić, że jeżeli K jest skończonym ciałem charakterystyki p, to ciało to ma p^n elementów dla pewnego $n \in \mathbb{N}$.

4.16. Niech V będzie przestrzenią liniową wymiaru n nad ciałem K. Pokazać, że dla dowolnych $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$, $m \geq n+2$ istnieją $a_1, \ldots, a_m \in K$ takie, że $\Sigma_{i=1}^m a_i \alpha_i = 0$ i $\Sigma_{i=1}^m a_i = 0$.

4.17. Niech V będzie przestrzenią liniową, taką że $\dim V \geq n \geq 1$. Pokazać, że istnieje układ $n+1$ wektorów $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \alpha_{n+1}$ liniowo zależnych, takich że każde n wektorów tego układu jest liniowo niezależnych.

4.18. (T.Koźniewski - kolokwium) Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem K i $\mathcal{A} = \{\alpha_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ jej bazą. Dla każdej liczby $n \in \mathbb{N}$ niech $V_n = \mathrm{lin}\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\} \leqslant V$.

a) Pokazać, że dla każdej skończenie wymiarowej podprzestrzeni $W \leqslant V$ istnieje $n \in \mathbb{N}$ dla którego $W \leqslant V_n$.

b) Podać przykład takiej podprzestrzeni $W \leqslant V$, że $W \neq V$ i dla każdego wektora $\alpha \in V \setminus W$ zachodzi $\{a\alpha + \beta \mid a \in K, \beta \in W\} = V$.

4.19. Ile jest baz w przestrzeni $V = (\mathbb{Z}_p)^n$? Ile jest różnych podprzestrzeni k-wymiarowych?

4.1 Liga zadaniowa - seria IV

4.20. Niech V będzie przestrzenią $n-$ wymiarową nad ciałem K i niech $\alpha_1, \ldots \alpha_k$, $0 \leq k \leq n-1$ będzie układem liniowo niezależnym. Niech $\beta \in V$ i niech $a_1, \ldots a_n \in K$. Znaleźć warunki konieczne i dostateczne na to, by istniały wektory $\alpha_{k+1}, \ldots, \alpha_n$, takie by $\alpha_1, \ldots \alpha_n$ był bazą V i $a_1, \ldots a_n$ był ciągiem współrzędnych wektora β w tej bazie. Zbadać jednoznaczność rozwiązania. *Uwaga: jeżeli $k = 0$, to pytamy o istnienie i jednoznaczność bazy w której zadany wektor ma zadane współrzędne.*

4.21. Niech V będzie nieskończenie wymiarową przestrzenią liniową nad ciałem K. Pokazać, że istnieje przeliczalna rodzina właściwych podprzestrzeni V, których suma mnogościowa jest równa V.

4.22. Niech V przestrzenią liniową nad ciałem K. Pokazać, że jeżeli $\dim V > 1$ oraz $|K| = q < \infty$, to istnieją podprzestrzenie właściwe $V_0 \dots V_q$ przestrzeni V, dla których $V = V_0 \cup \dots \cup V_q$.

4.23. Niech $\mathcal{A} = (\alpha_1, \dots \alpha_n)$ i $\mathcal{B} = (\beta_1, \dots \beta_n)$ będą bazami przestrzeni liniowej V. Pokazać, że dla każdego $1 \leq k \leq n$ istnieją wskaźniki $i_1, \dots, i_k$ takie, że zamieniając wektory $\alpha_1, \dots \alpha_k$ z wektorami $\beta_{i_1}, \dots \beta_{i_k}$ otrzymamy z powrotem dwie bazy przestrzeni V.

4.2 Praca domowa - seria V do oddania 20 listopada

(zadania 4.24 – 4.29)

4.24. Niech

$$W = \mathrm{lin}_{\Bbbk}((1,0,1,-1,0),(0,1,1,-1,0),(0,0,0,-1,1)) \leqslant \mathbb{R}^5$$

oraz

$$V = \mathrm{lin}_{\Bbbk}((\sqrt{3},\sqrt{3},\sqrt{3},\sqrt{3},0),(1,1,1,1,0),(1,2,-1,0,-1+t^3+2t)) \leqslant \mathbb{R}^5$$

a) znajdź bazę $W \cap V$ dla $\Bbbk = \mathbb{Q}$ oraz dla $\Bbbk = \mathbb{R}$.

b) znajdź równania opisujące $W + V$ dla $\Bbbk = \mathbb{Q}$ oraz dla $\Bbbk = \mathbb{R}$.

c) rozstrzygnąć dla jakich wartości parametru $t \in \Bbbk$ suma algebraiczna jest sumą prostą $V + W = V \oplus W$ jeżeli $\Bbbk = \mathbb{Q}$ oraz jeżeli $\Bbbk = \mathbb{R}$.

4.25. Udowodnić, że w przestrzeni wielomianów $\Bbbk[x]_{\leq n}$ stopnia co najwyżej n nad ciałem $\Bbbk$, następujace ciagi wielomianów są bazą i znaleźć współczynniki wielomianu f w tych bazach:

a) Dla $a_0, \dots, a_n$ różnych elementów $\Bbbk$ wielomiany $g_i = \prod_{i \neq j}(x-a_i)(a_j-a_i)^{-1}$, gdzie przyjmujemy, że iloczyn po zbiorze pustym jest równy 1.

b) Dla elementu $a \in \Bbbk$ wielomiany $1, (x-a), \dots, (x-a)^n$. Znaleźć współczynniki przy założeniu, że $\mathrm{char}\, \Bbbk = p \geq n$

4.26. Wektory $\alpha_1, ..., \alpha_n$ o współrzędnych całkowitych stanowią układ liniowo niezależny w przestrzeni $\mathbb{Q}^m$. Wykazać, że stanowią one układ liniowo niezależny w przestrzeni $\mathbb{Z}_p^m$ dla prawie wszystkich liczb pierwszych p.

4.27. Niech $m \geq 1$. Załóżmy, że V jest przestrzenią liniową, zaś $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ jest taką, rodziną m-wymiarowych podprzestrzeni V, że $\dim V_i \cap V_j = m - 1$ dla dowolnych $i \neq j$. Uzasadnij, że $\dim \bigcap_{n \in \mathbb{N}} V_n = m-1$ lub $\dim \sum_{n \in \mathbb{N}} V_n = m+1$.

4.28. Rozważmy następujący podzbiór w przestrzeni funkcji $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$:

$$\{a\cos(x-b) : a, b \in \mathbb{R}\}$$

Pokazać, że to jest $\mathbb{R}$-podprzestrzeń liniowa i znaleźć jej wymiar nad $\mathbb{R}$.

4.29. Niech $f \in \Bbbk[X]$ będzie wielomianem stopnia $n > 0$. Niech I_f będzie podzbiorem złożonym z wielomianów postaci $f \cdot g$, gdzie $g \in \Bbbk[X]$ jest wielomianem. Pokazać, że I_f jest podprzestrznią liniową. Niech A_f będzie taką podprzestrznią, że $\Bbbk[x] = I_f \oplus A_f$. Znaleźć jakąś bazę przestrzeni A_f.

5 Suma prosta podprzestrzeni

5.1. Niech U, V będą podprzestrzeniami przestrzeni liniowej W nad ciałem K. Udowodnić równoważność następujących warunków:

a) $U + V = W$ i $U \cap V = \{0\}$

b) $\forall \alpha \in W\colon \alpha = \beta + \gamma$ gdzie $\beta \in U$, $\gamma \in V$ oraz przedstawienie to jest jednoznaczne

c) Jeżeli $\{\alpha_i\}_{i \in I}$ jest bazą U, zaś $\{\alpha_j\}_{j \in J}$ bazą V, to $\{\alpha_k\}_{k \in I \sqcup J}$ jest bazą W.

5.2. Uzasadnić, że dla dowolnego ciała K jeżeli W i U są przestrzeniami rozwiązań poniższych układów równań w K^n, to $K^n = U \oplus W$.

$$W : x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 0$$

$$U : x_1 = x_2 = x_3 = ... = x_n$$

.

5.3. (A.Salwa- kolokwium) Niech

$$V_{a,b} = \text{lin}\{(1,2,3,1), (1,3,2,1), (2,3,a,b)\} \leqslant \mathbb{R}^4$$

.

a) Znaleźć wymiar $V_{a,b}$ w zależności od $a, b \in \mathbb{R}$.

b) Dla jakich $a, b \in \mathbb{R}$ istnieją podprzestrzenie $W, Z \leqslant \mathbb{R}^4$, takie że

$$\mathbb{R}^4 = V_{a,b} \oplus W = W \oplus Z = V_{a,b} \oplus Z.$$

Podać przykłady takich W i Z.

5.4. (AW) Udowodnić, że jeśli $\dim V < \infty$, to $W_1 \oplus V \cong W_2 \oplus V$ wtedy i tylko wtedy gdy $W_1 \cong W_2$. Podać kontrprzykład, gdy $\dim V = \infty$.

5.5. Niech $B \subsetneq A$ będzie niepustym właściwym podzbiorem. Niech $\Bbbk$ będzie ciałem i niech $V = \Bbbk^A$. Rozważmy podprzestrzeń

$$W = \{f \in V\colon \forall_{b \in B} f(b) = 0\} \leqslant V.$$

Znaleźć dopełnienie w V podprzestrzeni W.

5.6. Niech $\{Un\}_{n \in \mathbb{N}}$ będzie rodziną jednowymiarowych podprzestrzeni przestrzeni $\mathbb{R}^2$. Pokazać, że istnieje taka podprzestrzeń $V \leqslant \mathbb{R}^2$, że $U_n \oplus V = \mathbb{R}^2$ dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$.

5.7. Niech $n > 1$ oraz K będzie ciałem charakterystyki rożnej od 2. Pokazać, że przestrzeń macierzy $M_{n \times n}(K)$ jest sumą prostą $V_+ \oplus V_-$, gdzie

$$V_+ = \{A\colon A = A^T\} \quad V_- = \{A\colon A = -A^T\}.$$

6 Przekształcenia liniowe

6.1. Które z następujących przekształceń przestrzeni liniowej V w przestrzeń liniową W nad ciałem k są liniowe?

a) $k = \mathbb{R}$, $V = \{g\colon X \longrightarrow \mathbb{R}\}$, gdzie X pewien zbiór, $W = \mathbb{R}$, $f(g) = g(x_0)$, gdzie $x_0 \in X$ ustalony punkt.

b) $k = \mathbb{R}$, $V = \{g\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, g \text{ różniczkowalna}\}$, $W = \mathbb{R}$, $f(g) = g'(x)$, gdzie $x \in \mathbb{R}$ ustalony punkt.

c) $k = \mathbb{C}$, $V = \mathbb{C}^2$,$W = \mathbb{C}^2$,$f(z_1, z_2) = (rez_1, i\, rez_2)$

d) $k = \mathbb{C}$, $V = W = \mathbb{C}$, $f(a + bi) = (a + b) + (a + b)i$

e) $V = k[X]$, $W = \{g\colon k \longrightarrow k\}$, $f(a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + ... + a_1X + a_0)(a) = a_na^n + a_{n-1}a^{n-1} + ... + a_1a + a_0$.. Podać przykład ciała k, dla którego f nie jest monomorfizmem.

6.2. Czy istnieje przekształcenie liniowe $f\colon \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^2$, takie że $f(i, 1) = (1 + 2i, i)$, $f(1, i) = (1 + i, 1 - i)$, $f(4i - 1, 1 + i) = (2 + 3i, 2i)$.

6.3. Podać przykład, o ile istnieje, przekształcenia liniowego $f\colon V \longrightarrow W$ spełniającego poniższe warunki. Czy podany przykład jest jedyny?

a) $V = \mathbb{R}^4$, $W = \mathbb{R}^3$, $f(V) = \operatorname{lin}\{(1, 2, 0), (-1, 0, 1)\}$,$f(1, 1, 0, 0) = (0, 0, 0)$

b) $V = \mathbb{R}^3$, $W = \mathbb{R}^3$, $(1, 0, 2) \notin f(V)$, $f(1, 1, 2) = (0, 0, 0)$

c) $V = \mathbb{C}^4$, $W = \mathbb{C}^5$, $\dim f(V) = 2$, $\ker f = \operatorname{lin}\{(1, i, i, 1), (i, 1, 1, i)\}$

6.4. Dla przestrzeni liniowych V i W nad ciałem K niech $L(V, W)$ oznacza przestrzeń liniową przekształceń liniowych z V w W. Pokazać, że jeżeli $\{\alpha_i\}_{i\in I}$ i $\{\beta_j\}_{j\in J}$ są bazami przestrzeni V i W odpowiednio, to przekształcenia $f_{i,j}$, takie, że $f_{i,j}(\alpha_k) = \delta_{i,k}\beta_j$ (gdzie $\delta_{i,k}$ jest równa 1 dla i=k i 0 w przeciwnym przypadku) są bazą przestrzeni $L(V, W)$.

6.5. Niech V i W będą przestrzeniami liniowymi nad ciałem K i niech $f, g : V \to W$ będą przekształceniami spełniającymi warunek: dla każdego wektora $v \in V$ istnieje skalar $c_v \in K$ taki, że $g(v) = c_vf(v)$. Pokazać, że istnieje $c \in K$ dla którego $g = cf$.

6.6. Ile jest przekształceń liniowych $(\mathbb{Z}_3)^3$ w $(\mathbb{Z}_3)^3$? Ile wśród nich jest izomorfizmów?

6.7. Niech $\alpha_0 \in V$. Sprawdzić, że przekształcenie $f : L(V, W) \to W$ zadane wzorem $f(\varphi) = \varphi(\alpha_0)$ jest liniowe. Znaleźć wymiar jego obrazu i jądra.

6.8. Pokazać, że przekształcenie liniowe $f : V \to W$ przestrzeni liniowych nad ciałem k, jest:

a) monomorfizmem wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje przekształcenie liniowe $g : W \to V$, takie, że $g \circ f = id_V$

b) epimorfizmem wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje przekształcenie liniowe $g : W \to V$, takie, że $f \circ g = id_W$

6.9. Niech $f : U \to W$ będzie przekształceniem liniowym.

a) Sprawdzić, że dla dowolnej przestrzeni V, f indukuje przekształcenia liniowe $f_* : L(V, U) \to L(V, W)$ i $f^* : L(W, V) \to L(U, V)$ zadane wzorami:

$$f_*(\varphi) = f \circ \varphi \qquad \text{i} \qquad f^*(\psi) = \psi \circ f$$

.

b) Udowodnić, że jeżeli f jest monomorfizmem (epimorfizmem), to f_* jest monomorfizmem (epimorfizmem) a f^* epimorfizmem (monomorfizmem).

c) Policzyć wymiary jądra i obrazu przekształceń f_* i f^*.

6.10. (AW) Niech $f_i : V_i \to V_{i+1}$ dla $i = 0, \ldots, n$ będzie ciągiem przekształceń liniowych, takim, że $im\, f_i = ker\, f_{i+1}$, $V_0 = 0$ i $V_{n+1} = 0$. Udowodnić, że $\sum_{i=1}^{n}(-1)^i \dim V_i = 0$.

6.11. (AW)Oznaczmy przez $M(n \times n)$ przestrzeń liniową macierzy kwadratowych rozmiaru n. (Jaki jest jej wymiar?). Niech

$$T : M(n \times n) \to M(n \times n)$$

będzie transpozycją, tzn. przekształceniem zadanym wzorem

$$T\left(\{a_{i,j}\}_{1 \le j,j \le n}\right) = \{a_{j,i}\}_{1 \le j,j \le n}\,.$$

Znaleźć jądra i obrazy przekształceń $S = \frac{1}{2}(Id + T)$ i $A = \frac{1}{2}(Id - T)$.

6.12. (AW) Rozważamy podprzestrzenie $W_k \subset K^n$ dla $k = 1, 2 \ldots n$:

$$W_k = \{x_1 = x_2 = \cdots = x_k = 0\}\,.$$

Opisać wszystkie f izomorfizmy K^n takie, że $f(W_k) \subset W_k$

6.13. Niech V, W, Z będą przestrzeniam liniowymi nad ciałem K, zaś $f \in \mathrm{Hom}(V, W)$, $g \in \mathrm{Hom}(W, Z)$ przekształceniami liniowymi takimi że $\mathrm{im}(f)$ ma skończenie generowane dopełnienie w W i $\mathrm{im}(g)$ ma skończenie generowane dopełnienie w Z. Czy wynika z tego, że $\mathrm{im}(g \circ f)$ ma skończenie generowane dopełnienie w Z?

6.14. Niech $f : M_{n\times n}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ będzie zdefiniowane wzorem $f([a_{ij}]) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}$. Pokazać, że f jest przekształceniem liniowym i znaleźć bazę $\ker f$.

6.15. Niech $\mathbb{R}[X]_{\leq n}$, $n \in \mathbb{N}$ będzie podprzestrzenią przestrzeni wielomianów złożona z wielomianów stopnia $\leq n$. Niech $f : \mathbb{R}[X]_{\leq n} \to \mathbb{R}[X]_{\leq n}$ będzie zadane wzorem $f : p(X) \to p(X+1) - p(X)$. Znaleźć $\ker f$ oraz $\operatorname{im} f$ podając ich bazy.

6.16. Niech V będzie skończenie wymiarową przestrzenią liniową. Załóżmy, że endomorfizmy $f, g \in End(V)$ są takie, że $\operatorname{im} f + \operatorname{im} g = V = \ker f + \ker g$. Pokazać, że $\operatorname{im} f \cap \operatorname{im} g = \{0\} = \ker f \cap \ker g$.

6.17. Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem K i niech $f : V \to V$ będzie przekształceniem liniowym spełniającym warunek $f \circ f = af + b\,\mathrm{id}_V$, gdzie $a, b \in K \setminus \{0\}$. Pokazać, że f jest monomorfizmem.

6.18. Niech V będzie rzeczywistą przestrzenią liniową parzystowymiarową. Pokazać, że istnieje przekształcenie liniowe $J : V \to V$, dla którego $J^2 = -Id_V$.

6.19. Niech V będzie rzeczywistą przestrzenią liniową, a $J : V \to V$ przekształceniem, takim, że $J^2 = -Id_V$. Wprowadzić w V strukturę przestrzeni liniowej nad $\mathbb{C}$, tak, że mnożenie przez $i \in \mathbb{C}$ jest przekształceniem J. Wywnioskować, że jeśli $\dim_{\mathbb{R}} V < \infty$, to $\dim_{\mathbb{R}} V$ jest parzysty.

6.1 Praca domowa - seria VI do oddania 4 grudnia 2018

(zadania 6.20 – 6.24)

6.20. Niech V i W będą skończenie wymiarowymi przestrzeniami liniowymi, zaś V_1, V_2, V_3 i W_1, W_2, W_3 podprzestrzeniami V i W odpowiednio. Załóżmy, że $V = V_i \oplus V_j$ i $W = W_i \oplus W_j$ dla $1 \leq i, j \leq 3$, $i \neq j$. Udowodnić, że jeżeli $\dim V = \dim W$, to istnieje izomorfizm $f : V \to W$, taki że $f(V_i) = W_i$ dla $i \in \{1, 2, 3\}$.

6.21. Niech V i W będą przestrzeniami liniowymi nad k i niech $V = V_1 \oplus V_2$. Dla $i = 1, 2$, niech $U_i = \{f \in \mathrm{Hom}(V, W) \colon \ker(f) \supset V_i\}$.
Pokazać, że $U_1 \cap U_2 = \{0\}$. Czy $\mathrm{Hom}(V, W) = U_1 \oplus U_2$?

6.22. Pokazać, że każdy endomorfizm skończenie wymiarowej przestrzeni liniowej nad ciałem charakterystyki różnej od 2 jest sumą dwóch automorfizmów.

6.23. Niech $f_a : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f_a((x_1, x_2, x_3)) = (x_1 + x_2, x_1 + ax_2 + x_3, x_2 + x_3)$, $a \in \mathbb{R}$ będzie przekształceniem liniowym. Niech $\mathcal{B} = ((1,1,0), (1,1,1), (0,1,1))$ będzie bazą $\mathbb{R}^3$. Rozstrzygnąć, dla jakich $a, b \in \mathbb{R}$ istnieje baza $\mathcal{A}$, dla której

$$M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}(f_a) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & b & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Znaleźć tę bazę.

6.24. Niech V będzie skończenie wymiarową przestrzenią liniową. Załóżmy, że endomorfizmy $f, g \in End(V)$ są takie, że $f \circ g = g \circ f$ oraz $f - g$ jest monomorfizmem. Pokazać, że $\ker(g \circ f) = \ker f \oplus \ker g$.

6.2 Praca domowa - seria VII do oddania 18 grudnia 2018

(zadania 6.25 – 6.30)

6.25. Podaj przykład endomorfizmu $f \in L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ spełniającego:

$(1,1,2) \in \operatorname{im}(f)$, $\quad \ker(f) = \operatorname{lin}\{(-1,2,1)\}$, $\quad f^3 = f \circ f \circ f = 0$.

6.26. Pokazać, że dla dowolnych macierzy A, B, C, dla których poniższe działania mają sens, spełniona jest następująca nierówność:

$$\operatorname{rank} BC + \operatorname{rank} AB \leq \operatorname{rank} ABC + \operatorname{rank} B.$$

6.27. Znaleźć macierz odwrotną do macierzy o $k + l$ wierszach i kolumnach postaci

$$\begin{bmatrix} I_k^k & U \\ 0 & I_l^l \end{bmatrix},$$

gdzie U jest pewną macierzą o k wierszach i l kolumnach, zaś I_k^k i I_l^l są macierzami jednostkowymi.

6.28. Niech $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ będzie dane wzorem $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 2x_2 + x_3, x_2 + x_3, x_1 + 2x_2 + 3x_3, x_1 + x_2 + 2x_3)$.

a) Znaleźć bazę przestrzeni $f^{-1}(E)$, gdzie przestrzeń E jest zadana przez układ równań:

$$E : \begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ x_3 - x_4 = 0 \end{cases}.$$

b) Opisać układem równań liniowych podprzestrzeń $f(W) \leqslant \mathbb{R}^4$, gdzie W jest opisane równaniem $x_1 + x_2 + x_3 = 0$.

c) Czy istnieją bazy $\mathcal{A}$ przestrzeni $\mathbb{R}^3$ oraz $\mathcal{B}$ przestrzeni $\mathbb{R}^4$ dla których

$$M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}(f) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

.

6.29. Niech $f : M_2(\mathbb{C}) \to M_2(\mathbb{C})$ będzie odwzorowaniem liniowym (sprawdź, że jest liniowe) danym jako:

$$f(X) = AX - XA, \text{ gdzie } A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C})$$

a) wyznacz macierz $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$ w bazie $\mathcal{B} = \{E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}, \}$, gdzie E_{ij} jest macierzą, w której jedynym niezerowym wyrazem jest (i,j)-ty wyraz i jest on równy jeden.

b) Znajdź bazy i wymiary przestrzeni $\ker(f)$ oraz $\mathrm{im}(f)$.

6.30. Niech $V = \mathbb{C}^3$. Sprawdź, że funkcjonały $f_1, f_2, f_3 \in V^*$ określone wzorami $f_1(x,y,z) = 5x - 2y$, $f_2(x,y,z) = -x - z$, $f_1(x,y,z) = -x + y + z$, stanowią bazę przestrzeni V^*. Znajdź bazę przestrzeni V, by ten układ był bazą dualną do szukanej bazy.

7 Endomorfizmy przestrzeni liniowych. Rzuty i symetrie

7.1. W przestrzeni liniowej $\mathbb{R}^4$ niech $U = \mathrm{lin}\{(1,0,1,1),(1,3,2,0),(0,-3,-1,1)\}$ zaś $V = \mathrm{lin}\{(0,1,0,1),(0,0,0,1)\}$. Sprawdzić, że $U \oplus V = \mathbb{R}^4$. Znaleźć macierz rzutu na V wzdłuż U oraz symetrii względem V wzdłuż U w kanonicznej bazie e_1, e_2, e_3, e_4.

7.2. W przestrzeni $\mathbb{R}_n[X]$ wielomianów stopnia $\leq n$ rozpatrzmy podprzestrzenie $V_1 = \{f \in \mathbb{R}_n[X] \colon \forall a \in \mathbb{R}\, f(a) = f(-a)\}$ i $V_2 = \{f \in \mathbb{R}_n[X] \colon \forall a \in \mathbb{R} \colon f(a) = -f(-a)\}$. Udowodnić, że $V_1 \oplus V_2 = \mathbb{R}_n[X]$. Znaleźć bazy V_1 i V_2. Znaleźć macierz rzutu na V_1 wzdłuż V_2 w bazie $1, x, x^2, .., x^n$

7.3. Pokazać, że jeżeli $f \colon V \longrightarrow V$ jest rzutem, to $\ker f \oplus \mathrm{im}\, f = V$. Czy jeżeli $\ker f \oplus \mathrm{im}\, f = V$, to f jest rzutem na pewną podprzestrzeń V wzdłuż innej podprzestrzeni V?

7.4. Pokazać, że jeżeli $f \colon V \longrightarrow V$ jest rzutem, to $f^2 = f$. Pokazać, że jeżeli $f^2 = f$, to f jest rzutem.

7.5. Pokazać, że jeżeli $f \colon V \longrightarrow V$ jest symetrią, to $f^2 = id$. Pokazać, że jeżeli $f^2 = id$, i charakterystyka ciała jest różna od 2, to f jest symetrią. Podać przykład, że założenie o charakterystyce jest istotne.

7.6. Niech V będzie skończenie wymiarową przestrzenią liniową nad ciałem K, zaś W i Z jej podprzestrzeniami takimi, że $\dim W \geq \dim Z$. Pokazać, że istnieje rzut $p : V \to V$, dla którego $p(W) = Z$.

7.7. Niech V będzie skończenie wymiarową przestrzenią liniową nad K i niech $f \in \operatorname{Hom}(V, V)$. Pokazać, że istnieje automorfizm h przestrzeni V oraz rzut g, takie że $f = hg$.

7.8. Które z poniższych macierzy traktowanych jako macierze przekształceń $\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ są macierzami tego samego przekształcenia liniowego zapisanego w różnych bazach (to znaczy macierzami podobnymi)? Które z nich są macierzami symetrii?

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & -2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & -3 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

7.9. Niech $f : V \to V$ będzie rzutem na podprzestrzeń $W \leqslant V$, wzdłuż podprzestrzeni $U \leqslant V$, $W \oplus U = V$.

a) Pokazać,że dla dowolnej przestrzeni Z, homomorfizmy indukowane $f_* : L(Z, V) \to L(Z, V)$ i $f^* : L(V, Z) \to L(V, Z)$ są także rzutami.

b) W obu przypadkach opisać podprzestrzenie na które i wzdłuż których się rzutuje.

c) Niech $\dim W = k$ $\dim U = l$ $k + l = n = \dim V$. Niech $\dim Z = m$. Dla rzutów f_* i f^* znaleźć wymiary podprzestrzeni na które i wzdłuż których się rzutuje.

8 Przestrzenie sprzężone

8.1. Niech $f(x, y, z) = 2x + y - 3z$ będzie funkcjonałem na $\mathbb{R}^3$. Znaleźć współrzędne f

a) w bazie sprzężonej do standardowej,
b) w bazie sprzężonej do $(3, 0, 0)$, $(0, 5, 0)$, $(0, 0, 7)$,
c) w bazie sprzężonej do $(2, 0, 0)$, $(1, 2, 0)$, $(0, 1, 2)$.

8.2. Niech $f, g : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ będą funkcjonałami zadanymi wzorami $f(x, y) = x + iy$, $g(x, y) = x - iy$. Wykazać, że $\{f, g\}$ stanowią bazę $(\mathbb{C}^2)^*$. Znaleźć taką bazę $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}^2$, że $\{f, g\}$ jest bazą sprzężoną do $\{\alpha_1, \alpha_2\}$.

8.3. Znaleźć taką bazę $\{\alpha_i\}_{i=1,2,3} \subset K^3$ by standardowy wektor sprzężony ϵ_1^* był równy $\alpha_2^* - 5\alpha_3^*$.

8.4. Niech V będzie przestrzenią wielomianów zespolonych stopnia nie większego od 3. Definiujemy funkcjonały $\Phi_i \in V^*$ dla $i = 0, 1, 2, 3$

$$\Phi_i(f) = f^{(i)}(1)$$

(i-ta pochodna). Znaleźć taką bazę $\{\alpha_i\}_{i=0,\ldots,3} \subset V$, że Φ_i jest bazą sprzężoną, tzn $\alpha_i^* = \Phi_i$.

8.5. Podać przykład bazy $\mathbb{R}^3$ taki, że $\epsilon^* = 2\alpha_1^* + \alpha_3^*$ oraz $\epsilon_2^* = \alpha_1^* + \alpha_2^*$.

8.6. Niech $\Phi; \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^4$ będzie dane wzorem

$$\Phi(x, y, z) = (x + 2y, x + 3y + 2z, y + 2z, x + y - 2z)\,.$$

Znaleźć obraz i jądro przekształcenia sprzężonego $\Phi^*; (\mathbb{C}^4)^* \to (\mathbb{C}^3)^*$.

Definicja. *Niech $W \leqslant V$ będzie podprzestrzenią liniową. Niech*

$$(W^\perp) = \{\varphi \in V^* :\ \varphi_{|W} = 0\}.$$

8.7. Niech $V \subset \mathbb{R}^4$ będzie przestrzenią rozpiętą przez wektory $(1, 2, 0, -3)$, $(-2, 3, 2, -3)$ i $(-3, 1, 2, 0)$. Opisać $V^\perp$ równaniami. Podać jego bazę.

8.8. Niech $V \subset \mathbb{R}^4$ będzie przestrzenią opisaną przez równanie $x_1 = x_2 = x_3 = x_4$. Opisać $V^\perp$ równaniami. Podać jego bazę.

8.9. Niech $W \leqslant V$ będzie podprzestrzenią liniową.Udowodnić,że istnieje izomorfizm $V^*/(W^\perp) \to W^*$.

8.10. Niech $L \subset V$, $\Phi : V \to W$. Wykazać, że

$$L \subset \ker \Phi \Longleftrightarrow im\,\Phi^* \subset (L^\perp)\,.$$

8.11. Opisać wszystkie funkcjonały $\varphi \in L(V, V)^*$ dla których $\varphi(fg) = \varphi(gf)$.

8.12. W przestrzeni wszystkich rzeczywistych macierzy $n \times n$ znaleźć największy możliwy wymiar podprzestrzeni $V \leqslant M_{n\times n}(\mathbb{R})$ takiej, że dla dla wszystkich $X, Y \in V$, $\operatorname{tr} XY = 0$.

8.13. Pokazać na przykładzie, że dla przestrzeni skończenie wymiarowej izomorfizm $\varphi_{\{\alpha_i\}} : V \to V^*$ zdefiniowany przez $\varphi_{\{\alpha_i\}}(\alpha_i) = \alpha_i^*$ zależy od wyboru bazy.

8.14. Pokazać, że dla przestrzeni skończenie wymiarowej izomorfizm $\psi_{\{\alpha_i\}} : V \to V^{**}$ zdefiniowany przez $\psi_{\{\alpha_i\}}(\alpha_i) = \alpha_i^{**}$ nie zależy od wyboru bazy i jest równy przekształceniu $\psi : V \to V^{**}$, $\psi(v)(f) = f(v)$. Udowodnić, że dla dowolnego przekształcenia liniowego $f : V \to W$ przemienny jest diagram:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\psi_V"'] & W \arrow[d, "\psi_W"] \\ V^{**} \arrow[r, "f^{**}"] & W^{**} \end{tikzcd} \quad .$$

8.15. Niech V, W będą skończenie wymiarowymi przestrzeniami liniowymi nad ciałem K. Niech $\Phi_V : V \to V^{**}$ będzie kanonicznym izomorfizmem.

a) Niech $\Psi : L(V,W)^* \to L(W,V^{**})$ będzie dane w następujący sposób: dla $f \in L(V,W)^*$, $\Psi(f)(w) \in V^{**}$ i jest dane wzorem $\Psi(f)(w)(\varphi) = f(g_{w,\varphi})$, gdzie $g_{w,\varphi} \in L(V,W)$ jest dane wzorem $g_{w,\varphi}(v) = \varphi(v)w$.

   Udowodnić, że Ψ jest liniowe i jest izomorfizmem.

b) Dla $V = W$ mamy izomorfizm $\Psi : L(V,V)^* \to L(V,V^{**})$. Udowodnić, że $\Psi^{-1}(\Phi_V) = \mathrm{tr}$.

8.1 Praca domowa pod choinkę - seria VIII do oddania 8 stycznia 2019

(zadania 8.16 – 8.20)

8.16. Udowodnić, że każde przekształcenie liniowe $f : V \to V$ skończenie wymiarowej przestrzeni liniowej nad dowolnym ciałem, dla którego $\dim \mathrm{im}(f) \leq \frac{1}{2} \dim V$, jest złożeniem dwóch rzutów.

8.17. Niech $R^4 = V_1 \oplus V_2$, gdzie $V_1 = \mathrm{lin}\{(2,0,1,1),(0,0,1,1)\}$ a V_2 jest opisane układem równań:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ 2x_1 & & & - & x_3 & + & x_4 & = & 0 \end{array}$$

Niech s będzie symetrią przestrzeni $\mathbb{R}^4$ względem V_1 wzdłuż V_2.
Niech $\varphi \in (\mathbb{R}^4)^*$ zadane będzie w bazie standardowej wzorem

$$\varphi(x_1,x_2,x_3,x_4) = x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4.$$

Znaleźć wzór na $s^*(\varphi)$.

8.18. Niech $M_{n\times n}(k)$ będzie przestrzenią liniową macierzy nad ciałem k i niech $\varphi \in (M_{n\times n}(k))^*$. Pokazać, że istnieje macierz A, taka że $\varphi(X) = \mathrm{tr}(XA)$ dla każdej macierzy $X \in M_{n\times n}(k)$.

8.19. Definicja: *Niech $W \leqslant V$ będzie podprzestrzenią liniową. Definiujemy:*

$$W^{\perp} = \{\varphi \in V^* : \varphi_{|W} = 0\} \leqslant V^*.$$

Udowodnić, że jeżeli V jest przestrzenią skończenie wymiarową, $W \leqslant V$ podprzestrzenią liniową zaś $\psi : V \to V^{**}$ kanonicznym izomorfizmem, to $\psi(W) = (W^{\perp})^{\perp}$.

8.20. Niech $\varphi_1, \ldots, \varphi_k \in V^*$ będą funkcjonałami określonymi na przestrzeni liniowej V (niekoniecznie skończenie wymiarowej). Pokazać, że

$$\mathrm{lin}\{\varphi_1, \ldots, \varphi_k\} = (\bigcap_{i=1}^{k} \ker \varphi_i)^{\perp}.$$

Wywnioskować:

a) $\varphi \in \mathrm{lin}\{\varphi_1, \ldots, \varphi_k\}$ wtedy i tylko wtedy gdy $\bigcap_{i=1}^{k} \ker \varphi_i \subseteq \ker \varphi$.

b) Jeżeli $\ker \varphi = \ker \varphi'$ to $\varphi = a\varphi'$ dla pewnego $a \in K$.

c) Jeżeli $\dim V = n$, to funkcjonały $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ są liniowo niezależne wtedy i tylko wtedy gdy $\bigcap_{i=1}^{n} \ker(\varphi_i) = \{0\}$.

$\star\star\star$ **WESOŁYCH ŚWIĄT !** $\star\star\star$