Praca domowa nr.6 (ostatnia) - do oddania 13.06.2019 na wykładzie

1. W grupie Σ_9 znaleźć elementy największego rzędu i policzyć ile jest takich elementów.

2. Ustalić, czy grupy $\mathbb{Z}$ liczb całkowitych z dodawaniem i $\mathbb{Q}^+$ liczb wymiernych z dodawaniem są izomorficzne. Odpowiedź uzasadnić.

3. Niech G będzie grupą skończoną, zaś $\varphi : G \to \Sigma_{|G|}$ homomorfizmem Cayleya. Dla dowolnego $g \in G$ podać rozkład na cykle rozłączne elementu $\varphi(g)$.

4. Niech G będzie taką grupą, że część wspólna wszystkich podgrup nietrywialnych jest podgrupą nietrywialną. Pokazać, że każdy element G jest skończonego rzędu.

5. Niech $SO(n) \leqslant O(n)$ będzie podgrupą ($O(n)$ oznacza grupę izometrii liniowych przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^n$, zaś $SO(n)$ podgrupę złożoną z izometrii zachowujących orientację). Znaleźć indeks $|\ O(n) : SO(n)\ |$.

6. Niech $\varphi : G \to H$ będzie homomorfizmem grup skończonych i niech rzędy $|G|$ i $|H|$ będą względnie pierwsze. Pokazać, że φ jest homomorfizmem trywialnym (to znaczy dla każdego $g \in G$, $\varphi(g) = 1$).

Praca domowa nr.5 - do oddania 31.05.2019

1. Rozpatrujemy przestrzeń $M_{n\times n}(\mathbb{R})$ macierzy o współczynnikach rzeczywistych.

a) Sprawdzić, że wzór $\langle A, B\rangle = Tr(AB^T)$ definiuje iloczyn skalarny na przestrzeni $M_{n\times n}(\mathbb{R})$;

b) Znaleźć podprzestrzeń prostopadłą do podprzestrzeni złożonej z macierzy o śladzie równym zero, podając jej bazę lub opisujący ją układ równań.

2. Dany jest iloczyn skalarny na przestrzeni $\mathbb{R}^3$, którego macierz w bazie standardowej jest równa:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

a) Zastosować ortogonalizację Gramma Schmidta do bazy e_1, e_2, e_3 .

b) Znaleźć wzór na rzut prostopadły na płaszczyznę H o równaniu $4x_1 - x_2 - x_3 = 0$.

c) Znaleźć wzór na symetrię prostopadłą względem H.

3. Przekształcenie przestrzeni euklidesowej $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ze standardowym iloczynem skalarnym ma w bazie standardowej macierz:

$$\frac{1}{d}\begin{bmatrix} a & 2 & -2 \\ 2 & b & 1 \\ c & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Dla jakich a, b, c, d przekształcenie f jest izometrią zachowującą orientację?

4. Dana jest afiniczna przestrzeń euklidesowa $\mathbb{R}^3$ ze standardowym iloczynem skalarnym. Znaleźć wzór na obrót o kąt $\frac{\pi}{3}$ wokół prostej L opisanej przez układ równań:

$$x_1 - x_2 = 1$$
$$x_1 - x_3 = 3$$

5. Izometria przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^3$ ze standardowym iloczynem skalarnym ma w bazie standardowej macierz:

$$\frac{1}{4}\begin{bmatrix} 3 & 1 & -\sqrt{6} \\ 1 & 3 & \sqrt{6} \\ \sqrt{6} & -\sqrt{6} & 2 \end{bmatrix}.$$

Ustalić, czy izometria ta jest symetrią prostopadłą względem pewnej płaszczyzny, czy obrotem wokół pewnej prostej. Jeżeli jest to symetria prostopadła, to znaleźć równanie opisujące płaszczyznę względem której jest symetria, a jeśli obrót to podać wektor kierunkowy prostej wokół której jest obrót i kąt obrotu.

6. W przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^n$ dany jest zbiór wektorów $\alpha_1, \dots, \alpha_k$, $k \le n$.

a) Niech $\beta_1, \dots, \beta_k$ będzie układem otrzymanym z $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ przez ortogonalizację Gramma Schmidta. Pokazać, że

$$W(\alpha_1, \dots, \alpha_k) = W(\beta_1, \dots, \beta_k) = \langle \beta_1, \beta_1\rangle \cdot \dots \cdot \langle \beta_k, \beta_k\rangle\,;$$

b) Udowodnić, że dla dowolnych układów wektorów $\alpha_1, .., \alpha_k$ i $\gamma_1, .., \gamma_l$ spełniona jest nierówność:

$$W(\alpha_1, .., \alpha_k, \gamma_1, .., \gamma_l) \le W(\alpha_1, .., \alpha_k)W(\gamma_1, .., \gamma_l),$$

przy czym równość zachodzi wtedy i tylko wtedy gdy $(\alpha_i, \gamma_j) = 0$ dla dowolnych $1 \le i \le k$, $1 \le j \le l$ lub conajmniej jeden z układów $\alpha_1, .., \alpha_k$, $\gamma_1, .., \gamma_l$ jest liniowo zależny.

Praca domowa nr.4 - do oddania 9.05.2019 na wykładzie

1. Znaleźć równanie parametryczne i układ równań opisujący najmniejszą podprzestrzeń afiniczną przestrzeni $\mathbb{R}^4$ zawierającą punkty:
$[-1, 1, 0, 1]$, $[0, 0, 2, 0]$, $[-3, -1, 5, 4]$, $[2, 2, -3, -3]$.

2. Znaleźć bazę punktową podprzestrzeni $af\{E_1 \cup E_2\}$ przestrzeni afinicznej $\mathbb{R}^4$ jeżeli

$$E_1 : \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 3 \end{cases} \qquad E_2 : \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5 \\ 5x_1 - \ \ x_2 + 3x_3 - 5x_4 = 2 \end{cases} .$$

3. W przestrzeni afinicznej $\mathbb{R}^3$ znaleźć równanie płaszczyzny przechodzącej przez punkt $[1, 1, 1]$ i zawierającej prostą L o przedstawieniu parametrycznym $\{[1, 0, 0] + t(1, -1, 1)\}$.

4. W przestrzeni afinicznej $\mathbb{R}^4$ dany jest punkt $c = [4, 5, 2, 7]$ oraz dwie proste:
L przechodząca przez punkty $a_1 = [1, 1, 1, 1]$, $a_2 = [0, -1, 0, 1]$
K przechodząca przez punkty $b_1 = [2, 2, 3, 1]$, $b_2 = [1, 2, 2, -2]$

a) Znaleźć prostą N przechodzącą przez punkt c i przecinającą proste L i K. Znaleźć punkty przecięcia L z N i K z N.

b) Znaleźć prostą K', taką by L i K' były skośne i by nie istniała prosta zawierająca punkt c i przecinająca L i K'.

5. Czy istnieje przekształcenie afiniczne $\mathbb{R}^4$, które punkty a_i przekształca na punkty b_i odpowiednio, zaś prostą P na prostą H? Jeżeli takie przekształcenie istnieje, to znaleźć jego postać analityczną i ustalić, czy jest ono wyznaczone jednoznacznie.

$$a_0 = [1, 1, 1, 1] \quad a_1 = [2, 3, 2, 3] \quad a_2 = [3, 2, 3, 2]$$

$$b_0 = [-1, 1, -1, 1] \quad b_1 = [0, 4, 0, 4] \quad b_2 = [2, 2, 2, 2]$$

$P = [1, 2, 2, 2] + t(0, 1, 0, 1)$
$H = [-1, 2, 0, 3] + s(1, -5, 1, -5)$

6. Udowodnić, że przekształcenie $f : E \to F$ przestrzeni afinicznych nad ciałem liczb rzeczywistych jest przekształceniem afinicznym wtedy i tylko wtedy, gdy zachowuje kombinacje afiniczne dowolnych dwóch punktów $p, q \in E$ (tzn. $f(ap + (1 - a)q) = af(p) + (1 - a)f(q)$ dla dowolnego $a \in \mathbb{R}$ i dowolnych punktów $p, q \in E$.)

Praca domowa nr.3 - do oddania 13.04.2019

1. Niech M będzie macierzą w bazach standardowych endomorfizmu $\phi : \mathbb{C}^3 \longrightarrow \mathbb{C}^3$ danego wzorem:
$\phi((x_1, x_2, x_3)) = (3x_1, x_1 + 2x_2 - x_3, x_1 - x_2 + 2x_3)$.

a) Znaleźć macierz diagonalną D, oraz macierz odwracalną C takie, że $M = C^{-1}DC$.

b) Obliczyć M^{29}, oraz wskazać macierz T taką, że $T^5 = M$.

2. Niech endomorfizm $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ będzie dany wzorem $f(x_1, x_2, \ldots, x_5) = (x_5, x_1, \ldots, x_4)$ i niech $A = M_{st}^{st}(f)$ będzie macierzą f w bazie standardowej.

a) Wykazać, że istnieje odwracalna macierz C o współczynnikach zespolonych, taka że macierz $C^{-1}AC$ jest diagonalna.

b) Znaleźć tę macierz.

c) Wykazać, że jeżeli ciało liczb zespolonych zastąpić ciałem liczb rzeczywistych, to macierz jak w punkcie a) nie istnieje.

3. Niech $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ będzie macierzą taką, że $a_{ij} = 1$ dla każdego $1 \leq i, j \leq n$.

a) Znaleźć wartości własne i wektory własne macierzy A.

b) Czy A jest macierzą diagonalizowalną?

4. Niech $A, B \in M_{n\times n}(K)$. Niech macierz A ma n różnych wartości własnych i niech $AB = BA$. Pokazać, że B jest macierzą diagonalizowalną.

5. Znaleźć postać Jordana macierzy:

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

6. Niech $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ będzie klatką Jordana. Wykazać, że dowolna potęga A jest podobna do klatki Jordana. Podać przykład macierzy $A \in M_{2\times 2}(\mathbb{Z}_p)$, gdzie p jest liczbą pierwszą, niediagonalizowalnej, której pewna potęga jest diagonalizowalna.

Praca domowa nr.2

1. Rozważamy przestrzenie liniowe nad ciałem liczb zespolonych $\mathbb{C}$.
Niech $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$ będzie bazą $\mathcal{A}$ przestrzeni V. Niech $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ będzie bazą $\mathcal{B}$, a $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ bazą $\mathcal{C}$ przestrzeni W, przy czym $\gamma_1 = \beta_1 - 2\beta_2 + \beta_3$, $\gamma_2 = \beta_1 + \beta_3$, $\gamma_3 = 2\beta_2 + \beta_3$. Niech $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ będzie bazą $\mathcal{D}$ przestrzeni U. Dane są przekształcenia liniowe $f : V \to W$ i $g : U \to W$, takie że

$$M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}(f) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -i & 2i & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 2i & 1+i \\ 1 & 1 & i & 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad M_{\mathcal{D}}^{\mathcal{C}}(g) = \begin{bmatrix} 2 & 2 & i \\ 1 & 0 & 1 \\ i & i & 0 \end{bmatrix}.$$

a) Sprawdzić, że g jest izomorfizmem.

b) Znaleźć $M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{D}}(g^{-1} \circ f)$.

2. Niech $f \colon V \longrightarrow W$ będzie przekształceniem liniowym przestrzeni liniowych nad $\mathbb{R}$. Przekształcenie to ma w bazach $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ przestrzeni V oraz $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ przestrzeni W macierz:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

a) Znaleźć bazy $\alpha_1', \alpha_2', \alpha_3', \alpha_4'$ przestrzeni V oraz $\beta_1', \beta_2', \beta_3'$ przestrzeni W, w których przekształcenie f ma macierz:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

b) Ustalić, czy istnieją bazy $\alpha_1'', \alpha_2'', \alpha_3'', \alpha_4''$ przestrzeni V oraz $\beta_1'', \beta_2'', \beta_3''$ przestrzeni W, w których przekształcenie f ma macierz:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}.$$

Odpowiedź uzasadnić.

3. Niech A będzie macierzą o m wierszach i n kolumnach, dla której jeżeli

$A \begin{bmatrix} x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix}$, to $\begin{bmatrix} x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix}$. Czy wynika z tego, że:

a) kolumny macierzy A są liniowo niezależne?

b) wiersze macierzy A są liniowo niezależne?

c) jakie są odpowiedzi na pytania a) i b) jeżeli $m = n$?

Odpowiedzi uzasadnić podając dowód lub przykład.

4. Niech V_n oznacza przestrzeń wielomianów o współczynnikach rzeczywistych stopnia $< n$. Określamy $\varphi : V_n \longrightarrow V_n$ wzorem

$$\varphi(f(x)) = x^2 f''(x) + x f'(x) + f(x).$$

(a) Wykazać, że φ jest izomorfizmen.

(b) Dla $n = 7$, $g(x) = x^2 + x^3 + 2x^5$ obliczyć $\varphi^{-1}(g(x))$.

5. (a) Dla jakich wartości parametrów $s, t \in \mathbb{Z}$ macierz odwrotna do macierzy

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 & 7 \\ 11 & 13 & 17 & 19 \\ 23 & 29 & 31 & 37 \\ 41 & 43 & s & t \end{bmatrix}$$

też ma wszystkie wyrazy całkowite?

(b) Dla jakich wartości parametru $t \in \mathbb{Z}$ macierz odwrotna do macierzy

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & t \end{bmatrix}$$

też ma wszystkie wyrazy całkowite?

6. Które z poniższych zdań jest prawdziwe?

a) Jeśli przekształcenie liniowe $\varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ spełnia:

$$\varphi((1,2,3)) = (2,3,1),\ \varphi((2,3,1)) = (3,1,2),\ \varphi((3,1,2)) = (1,2,3) \tag{1}$$

to spełnia

$$\varphi((2,3,-5)) = (3,-5,2),\ \varphi((3,-5,2)) = (-5,2,3),\ \varphi((-5,2,3)) = (2,3,-5). \tag{2}$$

b) Jeśli przekształcenie liniowe $\varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ spełnia warunek (2) to spełnia warunek (1).

(A) żadne, (B) oba, (C) tylko (a), (D) tylko (b).

Wybór należy uzasadnić.