# 1 Przekształcenia liniowe

**1.1.** Które z następujących przekształceń przestrzeni liniowej V w przestrzeń liniową W nad ciałem k są liniowe?

a) $V = W = k^n$, $f(x_1, x_2, .., x_n) = (x_1 + x_2, x_2 + x_3, .., x_n + x_1)$

b) $V = W = k^n$, $f(x_1, x_2, .., x_n) = (x_1 x_2, x_3, .., x_n)$

c) $k = \mathbb{R}$, $V = \{g\colon X \longrightarrow \mathbb{R}\}$, gdzie $X$ pewien zbiór, $W = \mathbb{R}$, $f(g) = g(x_0)$, gdzie $x_0 \in X$ ustalony punkt.

d) $k = \mathbb{R}$, $V = \{g\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, g \text{ różniczkowalna}\}$, $W = \mathbb{R}$, $f(g) = g'(x)$, gdzie $x \in \mathbb{R}$ ustalony punkt.

e) $k = \mathbb{C}$, $V = \mathbb{C}^2$ ,$W = \mathbb{C}$ ,$f(z_1, z_2) = (rez_1, i\, rez_2)$

f) $k = \mathbb{C}$, $V = W = \mathbb{C}$, $f(a + bi) = (a + b) + (a + b)i$

g) $V = k[X]$, $W = \{g\colon k \longrightarrow k\}$ , $f(a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + ... + a_1 X + a_0)(a) = a_n a^n + a_{n-1} a^{n-1} + ... + a_1 a + a_0$.. Podać przykład ciała $k$, dla którego f nie jest izomorfizmem.

**1.2.** Niech $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ będzie przekształceniem liniowym i niech $\varphi(1, 2) = 0$ i $\varphi(2, 3) = 1$. Wówczas $f(x, y) =$

**1.3.** Czy istnieje przekształcenie liniowe $f\colon \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^2$ , takie że

$$f(i, 1) = (1 + 2i, i),\ f(1, i) = (1 + i, 1 - i),\ f(4i - 1, 1 + i) = (2 + 3i, 2i).$$

**1.4.** Podać przykład, o ile istnieje, przekształcenia liniowego $f\colon V \longrightarrow W$ spełniającego poniższe warunki. Czy podany przykład jest jedyny?

a) $V = \mathbb{R}^4$ , $W = \mathbb{R}^3$ , $f(V) = \mathrm{lin}\{(1, 2, 0), (-1, 0, 1)\}$ ,$f(1, 1, 0, 0) = (0, 0, 0)$

b) $V = \mathbb{R}^3$ , $W = \mathbb{R}^3$ , $(1, 0, 2) \notin f(V)$, $f(1, 1, 2) = (0, 0, 0)$

c) $V = \mathbb{C}^4$ , $W = \mathbb{C}^5$ , $\dim f(V) = 2$, $\ker f = \mathrm{lin}\{(1, i, i, 1), (i, 1, 1, i)\}$

**1.5.** Niech $\mathbb{R}[X]_{\leq n}$ oznacza przestrzeń liniową wielomianów zmiennej $X$ stopnia $\leq n$. Niech $\varphi : \mathbb{R}[X]_{\leq 2} \to \mathbb{R}[X]_{\leq 3}$ będzie przekształceniem liniowym takim, że $\varphi(1) = 2X + 4$, $\varphi(1 + X) = 3X^3$, $\varphi(1 - X^2) = X^3 + X + 2$. Czy wielomian $1 + X + X^3 \in \mathrm{im}(\varphi)$?

**1.6.** Niech $\mathbb{R}[X]_{\leq n}$ oznacza przestrzeń liniową wielomianów zmiennej $X$ stopnia $\leq n$. Niech $\varphi : \mathbb{R}[X]_{\leq 2} \to \mathbb{R}[X]_{\leq 3}$ będzie przekształceniem liniowym takim, że $\varphi(1) = 2X + 4$, $\varphi(1 + X) = 3X^3$, $\varphi(1 - X^2) = X^3 + X + 2$. Czy $\ker(\varphi) = \{0\}$?

**1.7.** Niech $\mathbb{R}[X]_{\leq n}$ oznacza przestrzeń liniową wielomianów zmiennej $X$ stopnia $\leq n$. Niech $\varphi : \mathbb{R}[X]_{\leq 2} \to \mathbb{R}[X]_{\leq 3}$ będzie przekształceniem liniowym takim, że $\varphi(1) = 2X + 4$, $\varphi(1 + X) = 3X^3$, $\varphi(1 - X^2) = X^3 + X + 2$. Znajdź $\varphi^{-1}(1 + X + X^3)$. Czy to jest podprzestrzeń liniowa przestrzeni $\mathbb{R}[X]_{\leq 2}$?

**1.8.** Niech $i : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ bedzie dane wzorem $\varphi(z) = \bar{z}$. Czy $\varphi$ jest przekształceniem liniowym jednowymiarowej przestrzeni liniowej nad cialem $\mathbb{C}$?

**1.9.** Niech $i : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ bedzie dane wzorem $\varphi(z) = \bar{z}$. Czy $\varphi$ jest przekształceniem liniowym dwuwymiarowej przestrzeni liniowej nad cialem $\mathbb{R}$?

**1.10.** Dane są przekształcenia liniowe $\varphi, \psi : \mathbb{R}^3 \to V$, gdzie $V$ jest pewną przestrzenią liniową nad ciałem $\mathbb{R}$. Wiemy, że:

$$\varphi(1,2,4) = \psi(1,2,4),\ \varphi(1,0,1) = \psi(1,0,1),\ \varphi(3,2,6) = \psi(3,2,6).$$

Czy wynika z tego, że $\varphi = \psi$?

**1.11.** Dane są przekształcenia liniowe $\varphi, \psi : \mathbb{R}^3 \to V$, gdzie $V$ jest pewną przestrzenią liniową nad ciałem $\mathbb{R}$. Wiemy, że

$$\varphi(1,2,4) = \psi(1,2,4),\ \varphi(1,0,1) = \psi(1,0,1),\ \varphi(3,1,6) = \psi(3,1,6).$$

Czy wynika z tego, że $\varphi = \psi$?

**1.12.** Niech $f : V \to W$ będzie przekształceniem liniowym przestrzeni liniowych nad ciałem $K$. Niech $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ będzie liniowo niezależnym układem wektorów przestrzeni $V$. Niech $f(\alpha_1) = \beta_1, \ldots, f(\alpha_n) = \beta_n$. Czy $\beta_1, \ldots, \beta_n$ jest układem liniowo niezależnym?

**1.13.** Niech $f : V \to W$ będzie przekształceniem liniowym przestrzeni liniowych nad ciałem $K$. Niech $\beta_1, \ldots, \beta_n$ będzie liniowo niezależnym układem wektorów przestrzeni $W$. Niech $f(\alpha_1) = \beta_1, \ldots, f(\alpha_n) = \beta_n$. Czy $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ jest układem liniowo niezależnym?

## 1.1 Macierz przekształcenia liniowego.

**1.14.** Niech $f : V \to W$ będzie przekształceniem liniowym przestrzeni liniowych nad ciałem $K$. Niech $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ będzie bazą przestrzeni $V$, zaś $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ bazą przestrzeni $W$. Niech

$$f(\alpha_1) = \beta_1 + 2\beta_2, f(\alpha_2) = \beta_2 - 3\beta_3, f(\alpha_3) = \beta_1 - \beta_2 + \beta_3, f(\alpha_4) = \beta_2.$$

Znaleźć macierz $f$ w bazach $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$, $(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$.

**1.15.** Znaleźć macierz przekształcenia $f\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ danego wzorem:

$$f(x_1, x_2, x_3) = (3x_1 + 2x_3, x_1 + x_2 + x_3, x_2 - 4x_3)$$

w bazie $(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)$ oraz znaleźć bazę obrazu i jądra.

**1.16.** Niech $\alpha_1 = (0, 1, 2), \alpha_2 = (1, 0, 1), \alpha_3 = (2, -1, 0)$, oraz $\beta_1 = (1, 2, 3), \beta_2 = (-1, 3, 2), \beta_3 = (3, 1, 4)$ będą wektorami przestrzeni liniowej $\mathbb{R}^3$. Czy istnieje izomorfizm $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, taki że $f(\alpha_i) = \beta_i$? W przypadku pozytywnej odpowiedzi podać przykład takiego przekształcenia i znaleźć jego macierz w bazie kanonicznej $(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)$.

**1.17.** Niech $A$ będzie macierzą przekształcenia liniowego $f : \mathbb{C}^4 \longrightarrow \mathbb{C}^4$:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

w bazie $e_1 + ie_2, e_1 - e_3, e_2, e_4$ Znaleźć $f(i, 1, 2i, -i)$.

**1.18.** Przekształcenie $f : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^2$ ma w bazie $e_1, e_2$ macierz:

$$\begin{bmatrix} 1 & i \\ 2 & -i \end{bmatrix}$$

Znaleźć macierz tego przekształcenia w bazie $\alpha_1 = (i, 1)$, $\alpha_2 = (0, i)$.

**1.19.** skrypt TK: zad 1. str 63

**1.20.** Uzupełnić brakujące liczby rzeczywiste:

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 1 & \\ 1 & \\ & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & & 7 & \\ & 1 & & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -25 & -1 & 1 & 3 \\ -1 & & & \\ & & 5 & \\ & & & 0 \end{bmatrix}.$$

## 1.2 Rzuty i symetrie

**1.21.** W przestrzeni liniowej $\mathbb{R}^4$ niech $U = \mathrm{lin}\{(1, 0, 1, 1), (1, 3, 2, 0), (0, -3, -1, 1)\}$ zaś $V = \mathrm{lin}\{(0, 1, 0, 1), (0, 0, 0, 1)\}$.

a) Sprawdzić, że $U \oplus V = \mathbb{R}^4$.

b) Znaleźć macierz rzutu na $V$ wzdłuż $U$ w kanonicznej bazie $e_1, e_2, e_3, e_4$.

c) Znaleźć macierz symetrii względem $V$ wzdluż $U$ w kanonicznej bazie $e_1, e_2, e_3, e_4$.

**1.22.** W przestrzeni $\mathbb{R}_n[X]$ wielomianów stopnia $\leq n$ rozpatrzmy podprzestrzenie

$$V_1 = \{f \in \mathbb{R}_n[X] \colon \forall a \in \mathbb{R} \;\; f(a) = f(-a)\}$$

$$V_2 = \{f \in \mathbb{R}_n[X] \colon \forall a \in \mathbb{R} \;\; f(a) = -f(-a)\}.$$

a) Udowodnić, że $V_1 \oplus V_2 = \mathbb{R}_n[X]$;

b) Znaleźć bazy $V_1$ i $V_2$;

c) Znaleźć macierz rzutu na $V_1$ wzdłuż $V_2$ w bazie $1, x, x^2, .., x^n$

**1.23.** Pokazać, że jeżeli $f\colon V \longrightarrow V$ jest rzutem, to $\ker f \oplus im\, f = V$. Czy jeżeli $\ker f \oplus im\, f = V$, to $f$ jest rzutem na pewną podprzestrzeń $V$ wzdłuż innej podprzestrzeni $V$?

**1.24.** Pokazać, że jeżeli $f\colon V \longrightarrow V$ jest rzutem, to $f^2 = f$. Pokazać, że jeżeli $f^2 = f$, to $f$ jest rzutem.

**1.25.** Pokazać, że jeżeli $f\colon V \longrightarrow V$ jest symetrią, to $f^2 = id$. Pokazać, że jeżeli $f^2 = id$, i charakterystyka ciała jest różna od 2, to $f$ jest symetrią.

**1.26.** Niech $V = U \oplus W$. Pokazać, że jeżeli $p_U^W : V \longrightarrow V$ jest rzutem na podprzestrzeń $U$ wzdłuż podprzestrzeni $W$, to:

a) $Id - p_U^W = p_W^U$ jest rzutem na podprzestrzeń $W$ wzdłuż podprzestrzeni $U$

b) dla ciała charakterystyki różnej od 2, $Id - 2p_U^W = s_W^U$ jest symetrią względem $W$ wzdłuż $U$.

**1.27.** Niech $k$ będzie ciałem charakterystyki różnej od 2. Pokazać, że jeżeli $f, g \in \mathrm{Hom}(V, V)$ są rzutami dla których $f+g$ jest także rzutem, to $fg = gf = 0$.

**1.28.** * Niech $V$ będzie skończenie wymiarową przestrzenią liniową nad ciałem $K$, zaś $W$ i $Z$ jej podprzestrzeniami takimi, że $\dim W \geq \dim Z$. Pokazać, że istnieje rzut $p : V \to V$, dla którego $p(W) = Z$.

**Kartkówka I - 7.03.2019. Odpowiedzi:**

1. Niech $\mathcal{B} = (1+i, 2+i)$ będzie bazą $\mathbb{C}$ jako przestrzeni liniowej nad $\mathbb{R}$. Niech $f(z) = \bar{z}$. Znaleźć macierz

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -3 & -4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Wystarczy znaleźć współczynniki $f(1+i) = 1-i$ oraz $f(2+i) = 2-i$ w bazie $\mathcal{B}$ i wpisać je **w kolumnach** macierzy. Mamy

$$1 - i = -\mathbf{3}(1+i) + \mathbf{2}(2+i)$$

$$2 - i = -\mathbf{4}(1+i) + \mathbf{3}(2+i)$$

2. Dane jest przekształcenie liniowe $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ oraz $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$. Czy złożenie $gf : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ może w pewnych bazach $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ przestrzeni $\mathbb{R}^3$ oraz $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ przestrzeni $\mathbb{R}^4$ mieć macierz $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$? Odpowiedź uzasadnić.

   Nie - takie bazy nie istnieją. Macierz powyżej jest macierzą przekształcenia $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ którego wymiar obrazu wynosi 3. Tymczasem $\operatorname{im}(gf) \subset \operatorname{im} g$ zaś $\dim \operatorname{im} g \leq 2$.

**Kartkówka II – 12.03.2019. Odpowiedzi.**

1. Dane jest przekształcenie liniowe $f : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^2$ zadane wzorem

$$f(z_1, z_2, z_3) = (2z_1 - 3z_3, iz_2 - iz_3).$$

   Niech wektory $\beta_1 = (1, 2i, 0)$, $\beta_2 = (1, i, 1)$, $\beta_3 = (0, i, 2i)$ będą bazą $\mathcal{B}$ przestrzeni $\mathbb{C}^3$ (nie trzeba sprawdzać, że to jest baza). Znaleźć $M^{st}_{\mathcal{B}}(f)$.

$$M^{st}_{\mathcal{B}}(id_{\mathbb{C}^3}) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2i & i & i \\ 0 & 1 & 2i \end{bmatrix}$$

   Zatem

$$M^{st}_{\mathcal{B}}(f) = M^{st}_{st}(f) M^{st}_{\mathcal{B}}(id_{\mathbb{C}^3}) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 0 & i & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2i & i & i \\ 0 & 1 & 2i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -6i \\ -2 & -1-i & 1 \end{bmatrix}$$

2. Niech $f\colon V \longrightarrow W$ będzie przekształceniem liniowym przestrzeni liniowych nad $\mathbb{R}$. Przekształcenie to ma w bazach $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ przestrzeni $V$ oraz $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ przestrzeni $W$ macierz:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

   Czy istnieją bazy $\alpha_1', \alpha_2', \alpha_3', \alpha_4'$ przestrzeni $V$ oraz $\beta_1', \beta_2', \beta_3'$ przestrzeni $W$, w których przekształcenie $f$ ma macierz:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}?$$

   Odpowiedź uzasadnić.

Taka baza istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy $\dim \operatorname{im}(f) = 2$, czyli rząd wyjściowej macierzy jest równy 2. Schodkowanie kolumn lub wierszy przekonuje nas, że tak jest.

## 1.3 Wyznaczniki. Macierz odwrotna

**1.29.** skrypt T.K. zad 1, przykłąd pierwszy i trzeci. str.68

**1.30.** skrypt T.K. zad 2. str.68

**1.31.** skrypt T.K. zad 2. str.73

**1.32.** skrypt T.K. zad 1. str.78 przykład 3

**1.33.** skrypt T.K. zad 2. str.78

**1.34.** skrypt T.K. zad 3. str.78

**1.35.** Korzystając z własności wyznacznika udowodnić, że

$$\begin{vmatrix} 0 & x & y & z \\ x & 0 & z & y \\ y & z & 0 & x \\ z & y & x & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & z^2 & y^2 \\ 1 & z^2 & 0 & x^2 \\ 1 & y^2 & x^2 & 0 \end{vmatrix}$$

**1.36.** Pokazać,że macierz odwrotna do macierzy całkowito - liczbowej jest całkowito liczbowa wtedy i tylko wtedy, gdy jej wyznacznik jest równy $\pm 1$.

**Kartkówka III – 15.03.2019**

Imię i Nazwisko:________________________________________

1. Niech $\alpha_1 = (1, 2, 0)$, $\alpha_2 = (2, 1, 1)$, $\alpha_3 = (3, 0, 2)$ będzie bazą $\mathcal{A}$ przestrzeni liniowej $\mathbb{R}^3$. Niech przekształcenie liniowe $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ma w tej bazie macierz:

$$M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}(f) = \begin{bmatrix} -4 & -5 & -5 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

   Czy $f$ jest rzutem?

   *Dowód.* Tak. Wystarczy sprawdzić, że $M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}(f)M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}(f) = M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}(f)$, gdyż $f$ jest rzutem wtedy i tylko wtedy gdy $f^2 = f$. □

2. Niech $f : V \to V$ będzie symetrią przestrzeni liniowej nad ciałem $k$. Czy $f$ jest izomorfizmem, a jeżeli tak, to czemu jest równe przekształcenie $f^{-1}$?

   Tak. $f^{-1} = f$

**Kartkówka IV – 22.03.2019 odpowiedzi**

**1.** Niech $B = \begin{bmatrix} 515 & 313 & 212 \\ 151 & 131 & 121 \end{bmatrix}$ i $C = \begin{bmatrix} 5 & 11 \\ 11 & 13 \\ 1 & 121 \end{bmatrix}$ będą macierzami o współczynnikach rzeczywistych. Niech $A = CB$. Obliczyć $\det A$.

*Dowód.* Rząd macierzy $CB$ jest co najwyżej równy 2. Zatem $\det A = 0$. $\square$

**2.** Niech $A, B \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$, będą dowolnymi macierzami. Czy prawdą jest, że $\det(A + B) = \det A + \det B$?

*Dowód.* Nie. Na przykład $\det(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}) = 1$ a wyznaczniki obu składników są równe 0. $\square$

# 2 Endomorfizmy. Wektory własne, diagonalizacja.

**2.1.** Pokazać, że $\ker f^k$ i $\operatorname{im} f^k$ są niezmienniczymi podprzestrzeniami dowolnego endomorfizmu $f : V \to V$.

**2.2.** Niech $f : V \to V$ będzie endomorfizmem . Niech $\alpha \in V$ i rozpatrzmy ciąg wektorów $\alpha, f(\alpha), f^2(\alpha)\dots,$

a) Pokazać, że $\operatorname{lin}\{\alpha, f(\alpha), f^2(\alpha)\dots\}$ jest najmniejszą podprzestrzenią niezmienniczą zawierającą wektor $\alpha$.

b) Pokazać, że jeżeli $V$ jest przestrzenią skończenie wymiarową, to istnieje takie $k$, że dla $m > k$, $f^m(\alpha) \in \operatorname{lin}\{\alpha, f(\alpha), f^2(\alpha)\dots f^k(\alpha)\}$.

c) Niech $k$ będzie najmniejszą liczba o jakiej mowa w poprzednim punkcie. Pokazać, że $\alpha, f(\alpha), f^2(\alpha)\dots f^k(\alpha)$ jest bazą podprzestrzeni $\operatorname{lin}\{\alpha, f(\alpha), f^2(\alpha)\dots f^k(\alpha)\}$. Znaleźć macierz $f$ w tej bazie.

**2.3.** Niech $f$ będzie endomorfizmem $\mathbb{R}^4$, zadanym wzorem

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_2 + x_3, x_3, 0, 0).$$

Znaleźć wartości własne i odpowiadające im wektory własne. Czy istnieją $f$ niezmiennicze podprzestrzenie dwuwymiarowe $W, Y \leqslant \mathbb{R}^4$, dla których $R^4 = W \oplus Y$?

**2.4.** Niech $f : V \to V$ będzie endomorfizmem skończenie wymiarowej przestrzeni liniowej nad ciałem $K$. Pokazać, że jeżeli $\dim(\operatorname{im} f) = k$. to endomorfizm $f$ ma co najwyżej $k + 1$ wartości własnych. (Wskazówka: to jest bardzo łatwe zadanie)

**2.5.** Pokazać, że jezeli endomorfizm skończenie wymiarowej przestrzeni maco najmniej jedna wartość własną, to w pewnej bazie ma macierz górno-trójkątną. (wziąć bazę obrazu $f - aI$ i dopełnić do bazy całości)

**2.6.** Niech $f : M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ bedzie endomorfizmem

$$f(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

Znaleźć wektory własne i wartości własne.

**2.7.** Niech $V$ będzie przestrzenią przestrzenią linową wielomianów o współczynnikach w ciele $K$ stopnia $\leq n$. Niech $\phi\colon V \longrightarrow V$ będzie różniczkowaniem. Dla przekształcenia $\phi$ znaleźć:

a) podprzestrzenie niezmiennicze

b) wartości własne

c) wektory własne

**2.8.** Niech $f\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ i $g\colon \mathbb{C}^3 \longrightarrow \mathbb{C}^3$ będą przekształceniami liniowymi, które w bazach standardowych mają macierz:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Zbadać, czy istnieją bazy $\mathbb{R}^3$ i $\mathbb{C}^3$ odpowiednio, w których przekształcenia $f$ i $g$ mają macierz diagonalną.

**2.9.** Zbadać diagonalizowalność (nad $\mathbb{R}$ i $\mathbb{C}$) macierzy:

a)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & -2 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

b)

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

**2.10.** Znaleźć wektory własne odpowiadające wartościom własnym $a_{11}, a_{22}, a_{33}$ macierzy

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix}$$

**2.11.** Niech $W \leqslant V$ będzie podprzestrzenią niezmienniczą przekształcenia liniowego $f : V \to V$. Pokazać, że wielomian charakterystyczny $f_{|W}$ jest dzielnikiem wielomianu charakterystycznego $f$.

**2.12.** Niech $V$ będzie n-wymiarową przestrzenią liniową nad $\mathbb{C}$. Udowodnić, że dowolne dwa przemienne przekształcenia $f, g\colon V \longrightarrow V$, $f \circ g = g \circ f$ mają wspólny wektor własny.

**2.13.** Rozstrzygnąć, czy macierze

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix},$$

dla dowolnych $a, b, c, d \in K$ są podobne.

**Kartkówka V – 29.03.2019**

**1.** Niech $f : V \to V$ będzie endomorfizmem przestrzeni liniowej nad ciałem $K$. Niech $\alpha$ będzie wektorem własnym endomorfizmu $f$ o wartości własnej $a$, zaś $\beta$ wektorem własnym o wartości własnej $b$. Czy z tego, że $\alpha + \beta$ jest wektorem własnym wynika, że $a = b$?

*Dowód.* Tak - jest to oczywiste, jeżeli $\alpha$ i $\beta$ są liniowo zależne, czyli $\alpha = r\beta$. W przecienym przypadku mamy $f(\alpha+\beta) = c\alpha+c\beta = f(\alpha)+f(\beta) = a\alpha+b\beta$. Z liniowej nniezależnosci $a = b = c$. □

**2.** Przekształcenie $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ma w bazie standardowej macierz $A$. Wiedząc, że $(1, 0)$ jest wektorem własnym o wartości własnej 3, a wektor $(1, 1)$ jest wektorem własnym o wartości własnej 1 znaleźć $A$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

*Dowód.* $\varphi((0, 1)) = \varphi(1, 1) - \varphi((1, 0)) = (1, 1) - 3(1, 0) = (-2, 1)$. □

**Kartkówka V – 29.03.2019**

**1.** Czy dla dowolnych macierzy $A, B \in M_{n\times n}(R)$ zachodzi $\mathrm{tr}(AB^2A) = \mathrm{tr}(BA^2B)$? Odpowiedź uzasadnić.

*Dowód.* Tak $\mathrm{tr}(\underbrace{AB}\underbrace{BA}) = \mathrm{tr}(\underbrace{BA}\underbrace{AB})$. $\square$

**2.** Czy macierze $A$ i $B$ o współczynnikach rzeczywistych są podobne?

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

*Dowód.* Tak, macierz $A$ spełnia $A^2 = A$ i $rz(A) = 1$ jest więc tak jak i macierz $B$ macierzą rzutu na przestrzeń jednowymiarową, a każde dwie macierze rzutu o tym samym rzędzie są podobne. $\square$

**Kartkówka VI – 5.03.2019**

**1.** Czy macierze $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$ i $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$ są podobne?

**2.** Czy macierz $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 5 \\ 5 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ jest diagonalizowalna? Krótko uzasadnić odpowiedź.

**Kartkówka VI – 5.04.2019**

Imię i Nazwisko:________________________________________

**1.** Czy macierze $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$ i $\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 0 \\ 8 & 9 & 6 \end{bmatrix}$ są podobne? Tak, druga macierz jest diagonalizowalna, bo ma trzy różne wartości włąsne.

**2.** Macierz $A$ ma $r$ różnych od zera wartości własnych. Czy wynika z tego, że $\mathrm{rz}\, A \geq r$? Krótko uzasadnić odpowiedź.

# 3 Przestrzenie afiniczne

## 3.1 Podprzestrzenie afiniczne, bazy punktowe

**3.1.** W przestrzeni afinicznej $\mathbb{R}^4$ znaleźć przedstawienie parametryczne oraz układ równań opisujący podprzestrzeń afiniczną generowaną przez punkty:

a) $\{(-1, 1, 0, 1), (0, 0, 2, 0), (-3, -1, 5, 4), (2, 2, -3, -3)\}$

b) $\{(1,1,1,-1),(0,0,6,-7,),(2,3,6,-7),(3,4,1,-1)\}$
Przestrzenie te przedstawić jako przecięcia hiperpłaszczyzn w $\mathbb{R}^4$.

**3.2.** Znaleźć bazę punktową podprzestrzeni $K^3$ opisanej równaniem

$$x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 4.$$

**3.3.** Znaleźć bazę punktową af$(L_1 \cup L_2) \subset K^3$, gdzie

$$L_1 = \{[4,1,0] + t(2,3,-1) : \ t \in K\},$$

$$L_2 = \{[2,-2,1] + t(1,0,1)\}.$$

**3.4.** Niech $E = p + T(E_1)$, $E_2 = q + T(E_2)$ będą dwiema skośnymi (tzn $T(E_1) \cap T(E_2) = 0$ oraz $E_1 \cap E_2 = \emptyset$) podprzestrze niami w przestrzeni afinicznej $E$ nad dowolnym ciałem. Pokazać, że dla każdego punktu $x \notin E_1 \cup E_2$ istnieje conajwyżej jedna prosta $P$ przechodząca przez punkt $x$ i przecinająca $E_1$ i $E_2$. Wykazać, że prosta istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy $x \in < E_1 \cup E_2 >$ ale $\omega(p,x) \notin T(E_1) + T(E_2)$ i $\omega(q,x) \notin T(E_1) + T(E_2)$.

**3.5.** Znaleźć prostą przechodzącą przez punkt $b$ i przecinającą podprzestrzenie $E_1$ i $E_2$, jeżeli $b = (6,5,1,-1)$, zaś

$$E_1 : \begin{array}{rrrrcl} -x_1 & +2x_2 & +x_3 & & = & 1 \\ x_1 & & & +x_4 & = & 1 \end{array} \qquad E_2 : \begin{array}{rcl} x_1 & = & 4 + t \\ x_2 & = & 4 + 2t \\ x_3 & = & 5 + 3t \\ x_4 & = & 4 + 4t \end{array}.$$

# 4 Zadania przygotowawcze do kolokwium

**1.** Dla $t \in \mathbb{R}$ przekształcenie liniowe $\varphi_t : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ dane jest wzorem

$$\varphi_t(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + x_2 + tx_3, x_1 - x_2 - x_4, tx_2 + tx_3 + (t-1)x_4).$$

a) Znaleźć macierz tego przekształcenia w standardowych bazach $\mathbb{R}^4$ i $\mathbb{R}^3$.
b) Dla jakich $t \in \mathbb{R}$ przekształcenie $\varphi_t$ jest epimorfizmem?
c) Znaleźć bazę $\ker(\varphi_2)$.
d) Znaleźć wymiar przestrzeni $\ker(\varphi_0) \cap \ker(\varphi_1)$.

**2.** Niech $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ma macierz $M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}(f) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ w bazach $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$. Sprawdzić, czy $f$ jest izomorfizmem i znaleźć macierz $f^{-1}$ w bazie $\mathcal{B}$, jeżeli wiadomo, że $M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}(id) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$.

**3.** Obliczyć wyznacznik macierzy:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

**4.** Dane jest przekształcenie $f\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ które w bazie standardowej ma macierz:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Ustalić, czy istnieje baza $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ przestrzeni $\mathbb{R}^3$, w której $f$ ma macierz:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

**5.** Znaleźć formę Jordana macierzy:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

**6.** Odpowiedzieć na pytania uzasadniając swoją odpowiedź:

a) Jeżeli $A$ jest macierzą kwadratową $3 \times 3$ o wyrazach rzeczywistych taką, że $\det(A + A + A) = \det A^3$, to $\det A =$

b) Niech $C \in M_{4\times 3}$ i niech $C = BA$ gdzie $A \in M_{2\times 3}$, $B \in M_{4\times 2}$. Czy można tak dobrać macierze $A$ i $B$, że rząd macierzy $C$ jest równy 3?.

c) Niech $A$ będzie macierzą przekształcenia liniowego $\phi\colon V \to W$ w bazach $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$, przestrzeni $V$ oraz $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ przestrzeni $W$. Niech macierz $B$ powstaje z $A$ przez dodanie drugiej kolumny do pierwszej zaś macierz $C$ powstaje z $A$ przez dodanie drugiego wiersza do pierwszego. Wówczas:

$B$ jest macierzą $\phi$ w bazach:

$C$ jest macierzą $\phi$ w bazach:

d) Niech $V = \{A \in M_{n\times n}(K)\colon \operatorname{tr} A = 0\}$. Znaleźć wymiar $V$.

e) Macierz $A^2$ jest diagonalizowalna. Czy wynika z tego, że macierz $A$ jest diagonalizowalna?

## 5 Kolokwium – 24.04.2019

**1.** Niech przekształcenie $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ będzie dane wzorem

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 2x_2 + 3x_3, x_2 + x_3, x_1 + 2x_2 + 3x_3, x_1 + x_2 + 2x_3).$$

a) Znaleźć bazę $\ker f$ oraz bazę $\operatorname{im} f$.

b) Czy istnieją bazy $\mathcal{A}$ przestrzeni $\mathbb{R}^3$ oraz $\mathcal{B}$ przestrzeni $\mathbb{R}^4$ dla których

$$M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}(f) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}?$$

*Nie należy tych baz znajdywać, tylko odpowiedzieć na pytanie o istnienie, uzasadniając odpowiedź.*

**2.** Przekształcenie liniowe $f_t : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $t \in \mathbb{R}$ ma w bazie standardowej macierz

$$M_{st}^{st}(f_t) = \begin{bmatrix} 2-t & t & 1 \\ -t & 2+t & 1 \\ 2 & -2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Zbadać, dla jakich wartości parametru $t \in \mathbb{R}$ przekształcenie $f_t$ jest diagonalizowalne i dla znalezionych wartości $t$ wskazać bazę, w której macierz przekształcenia $f_t$ jest diagonalna.

**3.** Obliczyć wyznacznik macierzy:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

**4.** Niech $A \in M_{n\times n}(K)$ będzie pojedynczą klatką Jordana o wartości własnej różnej od zera. Wykazać, że macierz $A$ jest odwracalna i znaleźć formę Jordana jej odwrotności, uzasadniając swoją odpowiedź.

*W przypadku kłopotu z rozwiązaniem dla dowolnego $n$ proszę rozwiązać zadanie dla $n = 4$.*

**5.** Odpowiedzieć na pytania, krótko uzasadniając odpowiedź.

a) Czy istnieje przekształcenie liniowe $\mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^2$ takie, że jego jądro jest równe

$$\{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5 : x_1 = 4x_2,\ x_3 = x_4 = x_5\}?$$

b) Macierz $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ jest diagonalizowalna. Czy wynika z tego, że macierz transponowana $A^T$ jest także diagonalizowalna?

c) Macierze $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ mają ten sam wielomian charakterystyczny, Czy wynika z tego, że macierze te są podobne ( tzn. istnieje macierz odwracalna $C$, dla której $B = C^{-1}AC$)?

d) Macierze $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ mają ten sam wielomian charakterystyczny, Czy wynika z tego, że $\det A = \det B$?

e) Wielomian charakterystyczny macierzy $A \in M_{6\times 6}(\mathbb{R})$ jest równy $(\lambda-2)^4(\lambda-3)^2$. Wynika z tego, że $\operatorname{tr} A = \quad$ .

f) Wielomian charakterystyczny macierzy $A \in M_{6\times 6}(\mathbb{R})$ jest równy $(\lambda-2)^4(\lambda-3)^2$. Znaleźć postać Jordana tej macierzy, jeżeli wiadomo, że

$$\dim\ker(A-2I) = 2,\ \ker(A-2I)^2 \cap \operatorname{im}(A-2I)^2 \neq \{0\},\ \dim\ker(A-3I) = 1.$$

**Kartkówka VII – 14.05.2019**

**1.** Niech $p_0$, $p_1$, $p_2$ będą punktami afinicznie niezależnymi przestrzeni $\mathbb{R}^n$. Niech $r = -2p_0 + 3p_2$ i niech $p = 2p_0 + 3p_1 - 4p_2$.

(a) Uzasadnić, że punkty $r$, $p_1$, $p_2$ są afinicznie niezależne.

(b) Przedstawić punkt $p$ jako kombinację afiniczną punktów $r$, $p_1$, $p_2$.

$$p = \_\_r + \_\_p_1 + \_\_p_2$$

**2.** W przestrzeni afinicznej $\mathbb{R}^4$ znaleźć rzut punktu $[1, 2, 0, 1]$ na podprzestrzeń opisaną równaniem $x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 5$ wzdłuż prostej $\operatorname{lin}\{(1, 0, 1, 1)\}$.

**Kartkówka VII – 14.05.2019**

**1.** Niech $p_0$, $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\alpha_3$ będzie układem bazowym przestrzeni $\mathbb{R}^3$. Niech $p = p_0 + 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3$.

Przedstawić punkt $p$ jako kombinację afiniczną punktów $p_0$, $p_1 = p_0 + \alpha_1$, $p_2 = p_0 + \alpha_2 + \alpha_3$, $p_3 = p_0 + \alpha_3$.

$$p = \_\_p_0 + \_\_p_1 + \_\_p_2 + \_\_p_3$$

**2.** W przestrzeni afinicznej $\mathbb{R}^4$ znaleźć rzut punktu $[1, 2, 0, 1]$ na prostą $[1, 0, 0, 1] + t(1, 0, 1, 1)$ wzdłuż podprzestrzeni opisanej równaniem $x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 0$.

**Kartkówka VIII – 24.05.2019**

**1.** W przestrzeni $\mathbb{R}^3$ dany jest iloczyn skalarny, który w standardowej bazie $e_1, e_2, e_3$ ma macierz:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 5 \end{bmatrix}.$$

Napisać równanie płaszczyzny prostopadłej do wektora $(1, 0, 1)$ względem tego iloczynu skalarnego.

**2.** Niech $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ będzie izometrią przestrzeni euklidesowej (euklidesowej, czyli $\mathbb{R}^n$ z zadanym iloczynem skalarnym). Wówczas jeżeli $\alpha$ i $\beta$ są wektorami własnymi o różnych wartościach własnych, to $\alpha \perp \beta$.

**Kartkówka VIII – 24.05.2019**

**1.** W przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^4$ ze standardowym iloczynem skalarnym znaleźć równania płaszczyzny prostopadłej do $\operatorname{lin}\{(1,1,0,3),(0,2,1,1)\}$.

**2.** W przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^n$ z iloczynem skalarnym dana jest baza $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$. Niech $\alpha'_1, \alpha'_2, , \ldots, \alpha'_n$ będzie bazą otrzymaną z $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ metodą ortonormalizacji Gramma - Schmidta. Niech $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ będzie bazą ortonormalną taką, że $\beta_1 = \frac{\alpha_1}{\|\alpha_1\|}$ oraz dla każdego $1 \leq i \leq n{-}1$, $\operatorname{lin}\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_i\} = \operatorname{lin}\{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_i\}$. Czy wynika z tego, że $\alpha'_i = \beta_i$ lub $\alpha'_i = -\beta_i$ dla każdego $1 \leq i \leq n$? Odpowiedź uzasadnić.

**Pytania przygotowawcze do kolokwium**

*Wydrukowany i wypełniony test można, ale nie jest to wymagane, oddać w piątek 31 maja. Test nie będzie oceniany.*

Imię i Nazwisko:________________________________________

**1.** Niech $p_1, p_2, \ldots, p_n$ będą dowolnymi punktami przestrzeni afinicznej $E$. Niech $\sum_{i=1}^{n} a_i = 0$, $a_i \in \mathbb{R}$. Pokazać, że dla dowolnych punktów $q, r \in E$ zachodzi równość $\sum_{i=1}^{n} a_i \overrightarrow{qp_i} = \sum_{i=1}^{n} a_i \overrightarrow{rp_i}$.

**2.** W przestrzeni afinicznej $\mathbb{R}^4$ znaleźć przedstawienie parametryczne oraz układ równań opisujący podprzestrzeń afiniczną generowaną przez punkty $[-1, 1, 0, 1]$, $[0, 0, 2, 0]$, $[-3, -1, 5, 4]$, $[2, 2, -3, -3]$.

**3.** W przestrzeni afinicznej $E$ dane są dwie rozłączne podprzestrzenie $k-$wymiarowe $H_1$ i $H_2$, takie że $T(H_1) = T(H_2)$. Jaki jest wymiar podprzestrzeni generowanej przez sumę $H_1 \cup H_2$?

**4.** W przestrzeni afinicznej $\mathbb{R}^3$ dane są dwie proste $K$ i $L$ takie, że $K \cap L = \emptyset$, $T(K) \neq T(L)$ (takie proste nazywają się skośne). Dane jest przekształcenie afiniczne $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, które jest identycznością na każdej z prostych. Czy wynika z tego, że $f$ jest identycznością?

**5.** W przestrzeni afinicznej $\mathbb{R}^3$ dane są dwie proste $K$ i $L$ takie, że $K \cap L = \emptyset$, $T(K) \neq T(L)$ (takie proste nazywają się skośne). Dane jest przekształcenie afiniczne $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, takie, że $f(K) = K$ i $f(L) = L$. Czy wynika z tego, że $f$ jest identycznością?

**6.** W przestrzeni afinicznej euklidesowej $\mathbb{R}^4$ dane są proste

$$L = \{[0, 7, 1, 2] + t(0, 1, -1, 0)\} \text{ oraz } K = \{[1, 1, 1, 1] + t(1, 0, 0, -1)\}.$$

Znaleźć płaszczyznę przechodzącą przez punkt $[4, 1, 3, 1]$, która jest prostopadła do $L$ i nie przecina $K$.

**7.** Niech w przestrzeni afinicznej euklidesowej $\mathbb{R}^3$ ze standardowym iloczynem skalarnym płaszczyzny $P$ i $Q$ będą dane równaniami: $P: \ x_1+2x_2-3x_3=6$, $Q: \ x_1+x_2+x_3=3$. Znaleźć równania opisujące obraz płaszczyzny $Q$ przy

a) rzucie prostopadłym na płaszczyznę $P$.

b) symetrii prostopadłej względem płaszczyzny $P$.

**8.** Niech $W \leqslant \mathbb{R}^n$ będzie $k$ wymiarową podprzestrzenią przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^n$ ze standardowym iloczynem skalarnym. Niech $A, B \in M_{n\times k}$ będą macierzami, których kolumny są ortonormalnymi bazami $W$. Czy $A^T A = B^T B$?

**9.** W macierzy $A \in M_{n\times n}$ kolumny są ortonormalne względem standardowego iloczynu skalarnego. Czy wiersze też są ortonormalne?

**10.** Dana jest przestrzeń euklidesowa $\mathbb{R}^n$ z iloczynem skalarnym $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Niech $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ będzie izometrią, taką że 1 jest wartością własną $f$ o $n-1$ wymiarowej podprzestrzeni własnej. Pokazać, że istnieje wektor $\alpha$, $\|\alpha\| = 1$, taki, że $f(\beta) = \beta - \langle \beta, \alpha \rangle \alpha$ dla każdego wektora $\beta$.

**11.** Niech $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ będą przekształcenami liniowymi takimi, że $f^2 = f$, $g^2 = g$ i $f + g = id$. Pokazać, że $gf = 0$. Czy istnieje iloczyn skalarny na $\mathbb{R}^n$ dla którego $f$ i $g$ są rzutami ortogonalnymi?