(Rzeczywisty) iloczyn skalarny:

v i w - wektory

$v \circ w$ - liczba rzeczywista (skalar)

Inne oznaczenia:

$\langle v, w \rangle \quad v{\cdot}w \quad v.w \quad (v, w)$

$$v \circ w = |v||w| \cos \alpha$$

$$v = [v_1, v_2, v_3]$$

$$w = [w_1, w_2, w_3]$$

$$v \circ w = v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3$$

Własności:

<u>symetria</u>: $v \circ w = w \circ v$

<u>dwuliniowość</u>: $(av + bv') \circ (cw + dw') =$

$ac(v \circ w) + ad(v \circ w') + bc(v' \circ w) + bd(v' \circ w')$

dla $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ i wektorów v, v', w, w'

<u>nieujemność</u>: $v \circ v \geq 0$,

przy czym $v \circ v = 0 \iff v = \mathbf{0}$

Przestrzeń wektorowa (liniowa):
zbiór V, którego elementy nazywamy wektorami, wraz z określonymi na nim działaniami (których wynikiem są znów wektory) dodawania wektorów i mnożenia wektorów przez liczby rzeczywiste:
$+ : V \times V \longrightarrow V; \quad (v, w) \mapsto v + w$
$\cdot : \mathbb{R} \times V \longrightarrow V; \quad (a, v) \mapsto a \cdot v$

Aby zbiór V wyposażony w działania $+$ i $\cdot$ można było nazwać przestrzenią wektorową, muszą one ponadto spełniać pewne naturalne warunki, np. powinien w V istnieć wektor zerowy $\mathbf{0}$ taki, że $\mathbf{0} + v = v$ dla każdego $v \in V$ itd.

łączność: $(v+w)+z=v+(w+z)$

oraz

przemienność dodawania: $v+w=w+v$

rozdzielność: $a\cdot(v+w)=(a\cdot v)+(a\cdot w)$,

a także $(a+b)\cdot v=(a\cdot v)+(b\cdot v)$

zgodność mnożenia: $(ab)\cdot v=a\cdot(b\cdot v)$,

a przy tym $0\cdot v=\mathbf{0}$ i $1\cdot v=v$

Wniosek: Dla każdego $v\in V$ istnieje $(-v)\in V$ taki, że $(-v)+v=\mathbf{0}$.

Dowód: Istotnie, $((-1)\cdot v)+(1\cdot v)=$
$=((-1)+1)\cdot v=0\cdot v=\mathbf{0}$.

Przykłady przestrzeni wektorowych:

$\mathbb{R}$ (ze zwykłymi działaniami $+$ i $\cdot$)

liczby zespolone

$\mathbb{R}^n$ z działaniami zadanymi wzorami
$[v_1, \ldots, v_n] + [w_1, \ldots, w_n] = [v_1 + w_1, \ldots, v_n + w_n]$
i $a[v_1, v_2, \ldots, v_n] = [av_1, av_2, \ldots, av_n]$

$\mathbb{R}[x]$ - wielomiany o współczynnikach rzeczywistych

$C([0,1])$ - funkcje ciągłe o wartościach rzeczywistych na przedziale $[0,1]$,
$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$, $(a \cdot f)(x) = af(x)$

Przykłady iloczynów skalarnych:

$V = \mathbb{R}$, $v \circ w = 3vw$

$V = \mathbb{R}^2$, $[v_1, v_2] \circ [w_1, w_2] = v_1 w_1 + 2v_2 w_2$

$V = \mathbb{R}^3$,

$$[v_1, v_2, v_3] \circ [w_1, w_2, w_3] =$$
$$= (v_1 - 2v_2 + v_3)(w_1 - 2w_2 + w_3)$$

Uwaga: w tym przypadku $v \circ v = 0$ dla $v \neq \mathbf{0}$, np. dla $v = [-1, 0, 1]$

$V = \mathbb{R}[x]$, $P \circ Q = P(1)Q(1) + 2P''(0)Q''(0)$

Uwaga: j.w.

$V = C([0,1])$, $\qquad f \circ g = \int_0^1 f(x)g(x)\, dx$

Norma zadana przez iloczyn skalarny

Iloczyn skalarny $\circ$ w przestrzeni wektorowej V wyznacza normę euklidesową $|\ |: V \longrightarrow [0, \infty)$, zadaną wzorem $|v| = \sqrt{v \circ v}$.

Euklidesowa odległość (względem $\circ$) między dwoma punktami $v, w \in V$ to $d(v, w) = |v - w| = \sqrt{(v - w) \circ (v - w)}$.

W szczególności $|v| = 0 \iff v = \mathbf{0}$ i $d(v, w) = 0 \iff v = w$, o ile $\circ$ jest niezdegenerowany (ściśle dodatnio określony). W przeciwnym razie, $|\ |$ nazywamy półnormą (seminormą).

Przykład: Standardowy iloczyn skalarny na $\mathbb{R}^n$, zdefiniowany wzorem

$$v.w = v_1 w_1 + \ldots + v_n w_n,$$

wyznacza normę $|v| = \sqrt{v_1^2 + \ldots + v_n^2}$.

Inne normy

Norma na przestrzeni wektorowej V to funkcja $\| \ \| : V \longrightarrow [0, \infty)$ spełniająca następujące warunki:

<u>jednorodność</u>: $\|a{\cdot}v\| = |a|{\cdot}\|v\| \quad (a \in \mathbb{R})$

<u>nierówność trójkąta</u>: $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$

<u>niezdegenerowanie</u>: $\|v\| = 0 \iff v = \mathbf{0}$

Kula jednostkowa

Kulą jednostkową w przestrzeni wektorowej V z normą $\| \ \|$ jest zbiór $B = \{v \in V : \|v\| \leq 1\}$.

$B = \{v \in V : |v| \leq 1\}$ nazywamy elipsoidą.

Własności:

<u>środkowa symetria względem $\mathbf{0}$</u>:

$v \in B \iff -v \in B$

<u>wypukłość</u>: jeśli $v, w \in B$, a $t \in [0, 1]$, to $tv + (1 - t)w \in B$

<u>domkniętość i niepuste wnętrze</u>

Fakt: Gdy $V = \mathbb{R}^n$, to dla każdego zbioru B spełniającego te warunki istnieje norma na V, dla której jest on kulą jednostkową.

Przykłady norm:

$V = \mathbb{R}^n$, $\|[v_1, \ldots, v_n]\|_\infty = \max(|v_1|, \ldots, |v_n|)$

$V = \mathbb{R}^n$, $\|[v_1, \ldots, v_n]\|_1 = |v_1| + \ldots + |v_n|$

$V = \mathbb{R}^n$, $\|[v_1, \ldots, v_n]\|_p = (|v_1|^p + \ldots + |v_n|^p)^{1/p}$
dla $p \geq 1$ (nierówność Minkowskiego)

$V = \mathbb{R}[x]$, $\|P\| = |P(0)| + \max_{t \in [0,1]} |P'(t)|$

Twierdzenie Johna: Jeśli $\| \ \|$ jest normą na n-wymiarowej przestrzeni wektorowej V (np. $V = \mathbb{R}^n$), to istnieje iloczyn skalarny $\circ$ na V taki, że wyznaczona przez niego norma $| \ |$ spełnia nierówności

$$|v| \leq \|v\| \leq \sqrt{n} \cdot |v|$$

dla każdego wektora $v \in V$.

Uwaga: Każda norma pochodząca od iloczynu skalarnego spełnia nierówność trójkąta.

Nierówność Schwarza: $|v \circ w| \leq |v| \cdot |w|$
Dowód: Trójmian kwadratowy ($t \in \mathbb{R}$)

$$P(t) = |v|^2 \cdot t^2 + 2(v \circ w) \cdot t + |w|^2 =$$

$$= (v \circ v)t^2 + 2(v \circ w)t + (w \circ w) =$$

$$= (tv \circ tv) + (tv \circ w) + (w \circ tv) + (w \circ w) =$$

$$= (tv + w) \circ (tv + w) \geq 0$$

ma niedodatni wyróżnik

$$0 \geq \Delta = 4(v \circ w)^2 - 4|v|^2|w|^2.$$

Wniosek: Dla dowolnych $v, w \in V \setminus \{\mathbf{0}\}$

$$\frac{v \circ w}{|v| \cdot |w|} \in [-1, 1],$$

a więc istnieje dokładnie jedna liczba $\alpha \in [0, \pi]$ taka, że $v \circ w = |v| \cdot |w| \cdot \cos \alpha$. Tę liczbę α nazywamy miarą kąta między wektorami v i w. Zależy ona od wyboru iloczynu skalarnego (nie tylko od v i w). Jeśli $v \circ w = 0$, to $\alpha = \pi/2$ i mówimy, że wektory v i w są ortogonalne (prostopadłe).

Dowód nierówności trójkąta:

$$|v + w|^2 = (v + w) \circ (v + w) =$$

$$= (v \circ v) + 2(v \circ w) + (w \circ w) =$$

$$= |v|^2 + 2(v \circ w) + |w|^2 \leq$$

$$\leq |v|^2 + 2|v| \cdot |w| + |w|^2 = (|v| + |w|)^2,$$

a więc $|v + w| \leq |v| + |w|$ dla dowolnych $v, w \in V$.

Tożsamość równoległoboku:
$|v+w|^2+|v-w|^2=2(|v|^2+|w|^2)$

Dowód: $|v+w|^2+|v-w|^2=$

$= (v+w)\circ(v+w)+(v-w)\circ(v-w) =$

$= v\circ v+2v\circ w+w\circ w+v\circ v-2v\circ w+w\circ w =$

$$= 2(v\circ v+w\circ w) = 2(|v|^2+|w|^2)$$

Twierdzenie: Jeśli $\| \ \|$ jest normą na przestrzeni wektorowej V taką, że

$$\|v+w\|^2+\|v-w\|^2=2(\|v\|^2+\|w\|^2)$$

dla dowolnych $v,w\in V$, to na V istnieje iloczyn skalarny $\circ$, dla którego $|\ | = \|\ \|$.

Dowód: Dla $v, w \in V$ położmy
$v \circ w = (\|v + w\|^2 - \|v - w\|^2)/4$.
Oczywiście mamy także
$w \circ v = (\|v + w\|^2 - \|w - v\|^2)/4$,
więc $v \circ w = w \circ v$, ponieważ
$\|w - v\| = \|(-1) \cdot (v - w)\| =$
$= |(-1)| \cdot \|v - w\| = \|v - w\|$.
Ponadto, dla dowolnego $v \in V$, mamy
$4(v \circ v) = \|v + v\|^2 - \|v - v\|^2 =$
$= \|2v\|^2 - \|\mathbf{0}\|^2 = (2\|v\|)^2 - 0^2 = 4\|v\|^2$,
zatem $v \circ v \geq 0$ i $v \circ v = 0 \iff v = \mathbf{0}$.
Poza tym $|v| = \sqrt{v \circ v} = \|v\|$. Trzeba już tylko wykazać dwuliniowość $\circ$.
Wpierw udowodnimy, że dla $v, w, z \in V$
$v \circ (w + z) = (v \circ w) + (v \circ z)$, a więc i
$(w + z) \circ v = (w \circ v) + (z \circ v)$.

Dodajmy stronami cztery tożsamości równoległoboku (dla normy $\| \; \|$):

$$\underline{\|w+(v-z)\|^2}+\|w-(v-z)\|^2=\underline{\underline{2\|w\|^2}}+2\|v-z\|^2$$

$$2\|v+z\|^2+\underline{\underline{2\|w\|^2}}=\|(v+z)+w\|^2+\underline{\underline{\underline{\|(v+z)-w\|^2}}}$$

$$\underline{\underline{\underline{\|z+(v-w)\|^2}}}+\|z-(v-w)\|^2=\underline{\underline{\underline{\underline{2\|z\|^2}}}}+2\|v-w\|^2$$

$$2\|v+w\|^2+\underline{\underline{\underline{\underline{2\|z\|^2}}}}=\|(v+w)+z\|^2+\underline{\|(v+w)-z\|^2}$$

Po uproszczeniu dostajemy

$$2\|-v+w+z\|^2+2\|v+z\|^2+2\|v+w\|^2=$$

$$2\|v+w+z\|^2+2\|v-z\|^2+2\|v-w\|^2,$$

a zatem, po dalszym uproszczeniu,

$$(\|v+z\|^2-\|v-z\|^2)+(\|v+w\|^2-\|v-w\|^2)=$$

$\|(w+z)+v\|^2-\|(w+z)-v)\|^2$, czyli

$$4(v\circ z)+4(v\circ w)=4((w+z)\circ v),$$

tzn. $(v\circ w)+(v\circ z)=v\circ(w+z)$

(symetrię $\circ$ wykazaliśmy już wcześniej).

Indukcyjnie łatwo dowodzimy, że

$v\circ(w^{(1)}+\ldots+w^{(k)}) = (v\circ w^{(1)})+\ldots+(v\circ w^{(k)})$

dla $k \in I\!N$ i dowolnych $v, w^{(1)}, \ldots, w^{(k)} \in V$.

Gdy $w^{(1)} = \ldots = w^{(k)} = w$, mamy

$v \circ (kw) = k(v \circ w)$ dla $v, w \in V$.

Kładąc $\frac{1}{k}w$ zamiast w, dostajemy

$\frac{1}{k}(v \circ w) = v \circ (\frac{1}{k}w)$ dla $v, w \in V$.

Zatem dla $k, l \in I\!N$ oraz dowolnych wektorów $v, w \in V$ mamy

$v \circ (\frac{k}{l}w) = v \circ (\frac{1}{l} \cdot kw) = \frac{1}{l}(v \circ kw) =$

$= \frac{1}{l}(k \cdot (v \circ w)) = \frac{k}{l}(v \circ w)$,

czyli $v \circ (qw) = q(v \circ w)$ dla dowolnej dodatniej liczby wymiernej q.

Dla dowolnych $v, w \in V$ mamy

$v \circ (-w) = (\|v + (-w)\|^2 - \|v - (-w)\|^2)/4 =$
$= (\|v - w\|^2 - \|v + w\|^2)/4 =$
$-(\|v + w\|^2 - \|v - w\|^2)/4 = -(v \circ w)$,

więc dla każdej liczby wymiernej $q > 0$

$v \circ ((-q)w) = v \circ (-qw) = -(v \circ (qw)) =$
$= -q(v \circ w) = (-q)(v \circ w)$.

Wykazaliśmy, że $v \circ (rw) = r(v \circ w)$ dla wszystkich r wymiernych. Na mocy udowodnionych dotąd własności $\circ$ mamy, dla dowolnych liczb wymiernych a, b, c, d i dowolnych wektorów $v, v', w, w' \in V$,

$$(av + bv') \circ (cw + dw') =$$

$= ac(v \circ w) + ad(v \circ w') + bc(v' \circ w) + bd(v' \circ w')$.

Ale $(a, b, c, d) \mapsto (av + bv') \circ (cw + dw')$ jest ciągłą funkcją rzeczywistą na $I\!R^4$.

Istotnie, na mocy definicji $\circ$ mamy

$$(av + bv') \circ (cw + dw') =$$

$$(\|av+bv'+cw+dw'\|^2 - \|av+bv'-cw-dw'\|^2)/4,$$

wystarczy więc udowodnić ciągłość $(a, b, c, d) \mapsto \|av + bv' + cw + dw'\|$ oraz $(a, b, c, d) \mapsto \|av + bv' - cw - dw'\|$, ta zaś wynika z wypukłości normy. Przybliżając liczbami wymiernymi liczby rzeczywiste, dostajemy dwuliniowość $\circ$.

Uwaga: Jeśli o $\| \ \|$ założymy jedynie $\|rv\| = |r| \cdot \|v\|$ dla r wymiernych (a nie dla wszystkich $r \in \mathbb{R}$), to analogiczne twierdzenie nie jest prawdziwe.

Np. dla $V = I\!R$ i $\|x\| = \sqrt{x^2 + \varphi(x)^2}$, gdzie φ jest "dzikim" (Hamelowskim) rozwiązaniem równania funkcyjnego $\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y)$ dla $x, y \in I\!R$.

Wniosek: Jeżeli bryła wypukła ma środek symetrii i każdy dwuwymiarowy przekrój tej bryły płaszczyzną przechodzącą przez środek symetrii jest elipsą, to bryła owa jest elipsoidą.

Twierdzenie Dvoretzky'ego:

Każda n wymiarowa środkowo-symetryczna bryła wypukła ma przekrój środkowy wymiaru $c(\varepsilon)\log n$ ε-prawie elipsoidalny: $|v| \leq \|v\| \leq (1+\varepsilon)|v|$ na podprzestrzeni tego przekroju dla pewnej normy euklidesowej $|\ |$.

Dla $v^{(1)}, \ldots, v^{(k)} \in V$ niech

$$A_k = 2^{-k} \sum_{s_1 \in \{-1,1\}} \ldots \sum_{s_k \in \{-1,1\}} \|s_1 v^{(1)} + \ldots + s_k v^{(k)}\|^2,$$

zaś $B_k = \|v^{(1)}\|^2 + \ldots + \|v^{(k)}\|^2$.

Jeśli $\| \ \|$ jest euklidesowa, to $A_k = B_k$.

Jeśli $\| \ \|$ jest ε-prawie euklidesowa, to $(1-\varepsilon)^2 B_k \leq A_k \leq (1+\varepsilon)^2 B_k$, niezależnie od k i wyboru wektorów.

Twierdzenie Kwapienia: $(b > a > 0)$
Jeśli $a \cdot B_k \leq A_k \leq b \cdot B_k$, niezależnie od k i wyboru wektorów, to $\| \ \|$ jest $\varepsilon(a,b)$-prawie euklidesowa, przy czym stała $\varepsilon(a,b)$ nie zależy od wymiaru V.

Co dalej?

<u>analiza funkcjonalna</u>: przestrzeń Hilberta

<u>analiza harmoniczna</u>:
układy ortonormalne

<u>algebra</u>: algebry macierzy i operatorów

<u>analiza</u>:
gradient a pochodne kierunkowe

<u>analiza</u>: macierze nieujemnie określone

<u>rachunek prawdopodobieństwa</u>:
kowariancja