



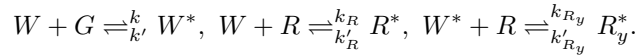
Seminarium Badawcze Zakładu Fizyki Matematycznej

Matematyczna analiza modelu transportu morfogenu

Marcin Małogrosz (UW)

01.12.2011

Morfogen to białko rozprzestrzeniające się w tkance organizmów żywych, determinujące proces różnicowania się komórek. Prelegent zajmuje się matematyczną analizą modelu z pracy [1] przedstawiającego transport morfogenu w dysku skrzydłowym muchy owocowej. W, G, W^*, R, R^*, R_g^* oznaczają koncentracje odpowiednio morfogenu, glipikanu, związków morfogen-glipikan, receptorów, związków morfogen-receptor, związków morfogen-receptor-glipikan. Rozpatrujemy następujące reakcje asocjacji-dysocjacji:



Nadto R^*, R_g^*, R ulegają internalizacji: $R^*, R_g^* \xrightarrow{\alpha^*} \emptyset, R \xrightarrow{\alpha} \emptyset$, zaś W, W^* degradacji: $W \xrightarrow{\gamma} \emptyset, W^* \xrightarrow{\gamma^*} \emptyset$. Zakładamy, że W jest produkowane w jednym punkcie znajdującym się na powierzchni dysku, co modelujemy za pomocą delty Diraca δ . Przyjmujemy, że W rozprzestrzenia się w przestrzeni pomiędzy dyskowej, zaś W^* po powierzchni dysku. Oznaczając $I = (-1, 1), I_T = (0, T) \times I, \Omega = I \times (0, 1), \Omega_T = (0, T) \times \Omega$ mamy

$$\begin{aligned} \partial_t W - D\Delta W &= -\gamma W, & (t, x, z) \in \Omega_T \\ \partial_t W^* - D^* \partial_{xx}^2 W^* &= -\gamma^* W^* + [kGW - k'W^*] - [k_{Rg}RW^* - k'_{Rg}R_g^*], & (t, x, z) \in I_T \times \{0\} \\ \partial_t R^* &= [k_R RW - k'_R R^*] - \alpha^* R^*, & (t, x, z) \in I_T \times \{0\} \\ \partial_t R_g^* &= [k_{Rg}RW^* - k'_{Rg}R_g^*] - \alpha^* R_g^*, & (t, x, z) \in I_T \times \{0\} \\ \partial_t R &= -[k_R RW - k'_R R^*] - [k_{Rg}RW^* - k'_{Rg}R_g^*] - \alpha R + \Gamma, & (t, x, z) \in I_T \times \{0\} \end{aligned}$$

z warunkami brzegowymi

$$\begin{aligned} -D\partial_z W &= -[kGW - k'W^*] - [k_R RW - k'_R R^*] + s\delta, & (t, x, z) \in I_T \times \{0\} \\ \partial_z W &= 0, & (t, x, z) \in I_T \times \{1\} \\ \partial_x W &= 0, & (t, x, z) \in (\partial I)_T \times (0, 1) \\ \partial_x W^* &= 0, & (t, x, z) \in (\partial I)_T \times \{0\} \end{aligned}$$

Dla uproszczonego jednowymiarowego modelu, który otrzymujemy przez zastąpienie równania na W równaniem

$$\partial_t W - D\partial_{xx}^2 W = -\gamma W - [kGW - k'W^*] - [k_R RW - k'_R R^*] + s\delta, \quad (t, x) \in I_T$$

pokazano, istnienie i jednoznaczność nieujemnych rozwiązań:

$$\begin{aligned} W &\in C([0, +\infty); H^1(I)) \cap C^1((0, +\infty); H^1(I)), \\ W^* &\in C([0, +\infty); H^1(I)) \cap C^1((0, +\infty); H^1(I)) \cap C((0, +\infty); H^3(I)) \\ R, R^*, R_g^* &\in C^1([0, +\infty); H^1(I)) \cap L_\infty(0, +\infty; L_\infty(I)). \end{aligned}$$

Jeśli dodatkowo $(\gamma^* + k')(\gamma + k\underline{G}) > k'k\overline{G}$ to

$$W, W^* \in L_\infty(0, +\infty; H^1(0, 1)).$$

Dla zagadnienia stacjonarnego pokazano, że istnieje rozwiązanie o ile

$$\frac{k'}{D \wedge (\gamma + k\underline{G})} \vee \frac{k\overline{G}}{D^* \wedge (\gamma^* + k')} < 1.$$

Rozwiązanie to jest jednoznaczne jeśli dodatkowo

$$\gamma \geq \frac{\overline{\Gamma}c_2}{2\alpha}, \gamma^* \geq \frac{\overline{\Gamma}c_1}{2\alpha}.$$

Bibliografia

[1] L. Hufnagel, J. Kreuger, S. M. Cohen, B. I. Shraiman, *On the role of glypicans in the process of morphogen gradient formation*, Developmental Biology 300, (2006) pp. 512-522.

notował Jan Wróblewski
korekta Marcin Małogrosz