# Seminarium Badawcze Zakładu Fizyki Matematycznej

## Matematyczna analiza modelu transportu morfogenu

Marcin Małogrosz (UW)

01.12.2011

Morfogen to białko rozprzestrzeniające się w tkance organizmów żywych, determinujące proces różnicowania się komórek. Prelegent zajmuje się matematyczną analizą modelu z pracy [1] przedstawiającego transport morfogenu w dysku skrzydłowym muchy owocowej. $W, G, W^*, R, R^*, R_g^*$ oznaczają koncentracje odpowiednio morfogenu, glipikanu, związków morfogen-glipikan, receptorów, związków morfogen-receptor, związków morfogen-receptor-glipikan. Rozpatrujemy następujące reakcje asocjacji-dysocjacji:

$$W + G \overset{k}{\underset{k'}{\rightleftharpoons}} W^*,\ W + R \overset{k_R}{\underset{k_R'}{\rightleftharpoons}} R^*,\ W^* + R \overset{k_{R_y}}{\underset{k_{R_y}'}{\rightleftharpoons}} R_y^*.$$

Nadto $R^*, R_g^*, R$ ulegają internalizacji: $R^*, R_g^* \rightharpoonup^{\alpha^*} \varnothing$, $R \rightharpoonup^{\alpha} \varnothing$, zaś $W, W^*$ degradacji: $W \rightharpoonup^{\gamma} \varnothing, W^* \rightharpoonup^{\gamma^*} \varnothing$. Zakładamy, że $W$ jest produkowane w jednym punkcie znajdującym się na powierzchni dysku, co modelujemy za pomocą delty Diraca $\delta$. Przyjmujemy, że $W$ rozprzestrzenia się w przestrzeni pomiędzy dyskowej, zaś $W^*$ po powierzchni dysku. Oznaczając $I = (-1,1), I_T = (0,T) \times I, \Omega = I \times (0,1),\ \Omega_T = (0,T) \times \Omega$ mamy

$$\begin{aligned}
\partial_t W - D\Delta W &= -\gamma W, && (t,x,z) \in \Omega_T \\
\partial_t W^* - D^* \partial_{xx}^2 W^* &= -\gamma^* W^* + [kGW - k'W^*] - [k_{Rg} RW^* - k_{Rg}' R_g^*], && (t,x,z) \in I_T \times \{0\} \\
\partial_t R^* &= [k_R RW - k_R' R^*] - \alpha^* R^*, && (t,x,z) \in I_T \times \{0\} \\
\partial_t R_g^* &= [k_{Rg} RW^* - k_{Rg}' R_g^*] - \alpha^* R_g^*, && (t,x,z) \in I_T \times \{0\} \\
\partial_t R &= -[k_R RW - k_R' R^*] - [k_{Rg} RW^* - k_{Rg}' R_g^*] - \alpha R + \Gamma, && (t,x,z) \in I_T \times \{0\}
\end{aligned}$$

z warunkami brzegowymi

$$\begin{aligned}
-D\partial_z W &= -[kGW - k'W^*] - [k_R RW - k_R' R^*] + s\delta, && (t,x,z) \in I_T \times \{0\} \\
\partial_z W &= 0, && (t,x,z) \in I_T \times \{1\} \\
\partial_x W &= 0, && (t,x,z) \in (\partial I)_T \times (0,1) \\
\partial_x W^* &= 0, && (t,x,z) \in (\partial I)_T \times \{0\}
\end{aligned}$$

Dla uproszczonego jednowymiarowego modelu, który otrzymujemy przez zastąpienie równania na $W$ równaniem

$$\partial_t W - D\partial_{xx}^2 W = -\gamma W - [kGW - k'W^*] - [k_R RW - k_R' R^*] + s\delta, \qquad (t,x) \in I_T$$

pokazano, istnienie i jednoznaczność nieujemnych rozwiązań:

$$\begin{aligned}
W &\in C([0,+\infty); H^1(I)) \cap C^1((0,+\infty); H^1(I)), \\
W^* &\in C([0,+\infty); H^1(I)) \cap C^1((0,+\infty); H^1(I)) \cap C((0,+\infty); H^3(I)) \\
R, R^*, R_g^* &\in C^1([0,+\infty); H^1(I)) \cap L_\infty(0,+\infty; L_\infty(I)).
\end{aligned}$$

Jeśli dodatkowo $(\gamma^* + k')(\gamma + k\underline{G}) > k'k\overline{G}$ to

$$W, W^* \in L_\infty(0,+\infty; H^1(0,1)).$$

Dla zagadnienia stacjonarnego pokazano, że istnieje rozwiązanie o ile

$$\frac{k'}{D \wedge (\gamma + k\underline{G})} \vee \frac{k\overline{G}}{D^* \wedge (\gamma^* + k')} < 1.$$

Rozwiązanie to jest jednoznaczne jeśli dodatkowo

$$\gamma \geq \frac{\overline{\Gamma} c_2}{2\alpha}, \gamma^* \geq \frac{\overline{\Gamma} c_1}{2\alpha}.$$

**Bibliografia**

[1] L. Hufnagel, J. Kreuger, S. M. Cohen, B. I. Shraiman, *On the role of glypicans in the process of morphogen gradient formation*, Developmental Biology 300, (2006) pp. 512-522.

notował Jan Wróblewski

korekta Marcin Małogrosz