Seminarium Badawcze Zakładu Fizyki Matematycznej

Optymalne sterowania w układzie zamkniętym dla procesów typu reakcja dyfuzja

Grzegorz Dudziuk (UW)

24.11.2011

Rozpatrujemy model:

$$\begin{cases} y_t - \Delta y = f(y) + \sum_{j=1}^{m} g_j(x)\kappa_j(t), \quad \Omega \subset \mathbb{R}^d, \text{ograniczony}, \\ \beta_j \dot{\kappa} + \kappa_j = w_j(y(t)), \\ y \equiv 0 \text{ na } \partial\Omega, \\ y(0) = y_0, \\ \kappa_j(0) = a_j, j = 1...n. \end{cases}$$

Ponadto rozpatrujemy dwie postacie funkcji w_j, opisujące sterowania w układzie zamkniętym. Pierwszą z nich jest:

$$w_j(y(\cdot\,,t)) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{jk}\omega_k \left(y(x_k^*,t) - y^*(x_k^*,t)\right)$$

dla pewnych ustalonych x_k^*. Drugą z nich jest:

$$w_j(y(\cdot\,,t)) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{jk}\omega_k \left(\int_\Omega \gamma_k(y - y^*)\right).$$

Przyjmujemy następujące założenia:

- ω_k - ograniczona, Lipschitzowska,
- f - Lipschitzowska,
- $g \in L^p$, $p \geq \max(2,d)$.

Uprośćmy model do przypadku $n, m = 1$. W zależności od przyjętego spośród powyższych dwóch koncepcji przypadku, sterowaniem będziemy nazywać:

- $u = (g, \gamma)$,
- $u = (g, x^*)$,

gdzie, w zależności od przyjetego przypadku, rozpatrujemy następujące przestrzenie dla wyboru u:

$$\begin{aligned} U^0 &= L^p \times L^2 \text{ lub } L^p \times \mathbb{R}^d, \\ U^1 &= W^{1,p} \times L^2 \text{ lub } W^{1,p} \times \mathbb{R}^d, \\ U &= W^{1,p}(\Omega) \times L^2(\Omega) \end{aligned}$$

Wprowadzamy także oznaczenie:

$$U_{ad} = L^p \times L^2 \text{ lub } L^p \times A, \quad A = \{x \in \Omega\colon \mathrm{dist}(x, \partial\Omega) \geq r\}.$$

Ponadto definiujemy:

$$J(u) = \int_0^t \|G(u) - y^*\|_2^2 \, dt$$

gdzie $G\colon U_{ad} \mapsto L^2(\Omega \times (0,T))$ rozumiemy jako operator stanu przyporządkowujący rozwiązanie y sterowaniu u. Dodajemy czynnik regularyzujący:

$$J_\varepsilon(u) = J(u) + \varepsilon\|u\|_U^2.$$

Na seminarium był omawiany uzyskany rezultat dotyczący rozwiązywalności nastepującego zadania optymalizacji:

$$\inf_{U_{ad}} J_\varepsilon(u).$$

Ta wielkość jest dobrze określona, ponieważ mamy ograniczenie od dołu. Udowodniona została podciągowa ciągłość:

$$G\colon U^0 \mapsto L^2(Q_T), \quad Q_T = L^2(\Omega \times (0,T))$$

oraz słaba podciągowa ciągłość:

$$G\colon U^0 \mapsto L^2(Q_T).$$

Tematyka stojąca za rozpatrywanym modelem to między innymi regulowanie zachowania układu w celu zachowania równowagi niestabilnej, mając do dyspozycji skończoną liczbę urządzeń sterujących oraz pomiarowych. Model znajduje zastosowanie między innymi w radioterapii nowotworów lub przy sterowaniu procesem chłodzenia reaktora atomowego, gdyby zaczął się rozgrzewać.

notował Jan Wrólewski