



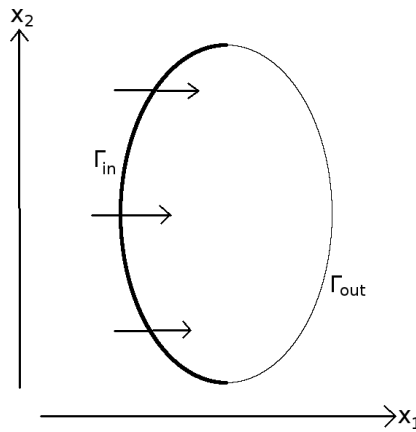
Seminarium Badawcze Zakładu Fizyki Matematycznej
 Stacjonarne równania Naviera-Stokesa z warunkami brzegowymi
 poślizgu wpływu
 Tomasz Piasecki (UW)
 27.10.2011

Przedstawiana praca dotyczy zachowania się płynu barotropowego. Jest ona tworzona przez Tomasza Piaseckiego (UW) i Piotra Muchę (UW). Dokładnie rzecz biorąc interesuje nas przepływ ściśliwego płynu barotropowego w obszarze ograniczonym. Jest on opisany za pomocą następującego układu Naviera-Stokesa:

$$\begin{cases} \varrho(v\nabla v) - \operatorname{div} \mathbb{T} = \varrho f, \\ \mathbb{T} = 2\mu\mathbb{D}(v) + v \operatorname{div} v I - pI, \\ \operatorname{div}(\varrho v) = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Niewiadomymi funkcjami opisującymi przepływ są pole prędkości v i gęstość ρ . Pierwsze równania to prawo zachowania pędu, drugie to zachowanie masy. Warunki brzegowe doprecyzujemy za chwilę. Interesuje nas istnienie regularnych rozwiązań, bliskich szczególnemu rozwiązaniu

$$(\bar{v}, \bar{\varrho}) = ([1, 0], 1).$$



Rysunek 1: Przepływ płynu przez brzeg badanego obszaru

Przez regularne rozwiązania rozumiemy tu funkcje, których słabe pochodne spełniają układ prawie wszędzie. W najprostszym ujęciu rozwiązań możemy poszukiwać w przestrzeni $v \in W_p^2, \rho \in W_p^1$.

Problem (1) rozważany był dotychczas głównie z warunkami brzegowymi typu Dirichleta. Znacznie słabiej zbadane są warunki brzegowe typu Naviera:

$$\begin{cases} nT(v, \pi)\tau + \beta(v\tau) = b, \\ n \cdot v = d \neq 0, \\ \varrho|_{\Gamma_{in}} = \varrho_{in} \end{cases} \quad (2)$$

gdzie $d > 0$ w przypadku wpływu i $d < 0$ w przypadku wypływu, a $\Gamma = \Gamma_{in} \cup \Gamma_{out}$ to brzeg badanego obszaru. Dopuszczenie przepływu przez brzeg obszaru wymusza zadanie gęstości na części brzegu z wpływem (warunek (2)₃). Warunek taki nazywać będziemy warunkiem wpływu. Napotykamy wówczas problem z rozwiązaniem równania ciągłości w otoczeniu punktów, gdzie jego charakterystyki stają się styczne do brzegu. Punkty te nazywać będziemy punktami osobliwymi. Przy naszych założeniach na kształt obszaru mamy dwa punkty osobliwe, oznaczmy je x_*, x^* . W otoczeniu x_*, x^* mamy $x_2 = x_2(x_1)$,

Układ (1) z warunkiem wpływu (dla niejednorodnych warunków Dirichleta na prędkość $v|_{\Gamma} = v_0$) rozważany był po raz pierwszy w pracy [Valli, Zajączkowski 1986], w podejściu L_2 . Pierwszym wynikiem w podejściu L_p była praca [Beirao da Veiga 1987] dla jednorodnych warunków brzegowych. Podejście L_p z warunkiem wpływu, co jest najbardziej interesujące z naszego punktu widzenia, zastosowane zostało w pracach [Kweon, Kellogg 1996] oraz [Plotnikow, Sokolowski 2005, 2006].

Pokazano istnienie silnego rozwiązania

$$v \in W_p^2, \varrho \in W_p^1, 2 < p < 3.$$

przy pewnych ograniczeniach na brzeg obszaru w otoczeniu punktów osobliwych. Co ciekawe, w obydwu cytowanych pracach ograniczenie na brzeg jest takie samo i sprowadza się do warunku:

$$x_2''(x_1) \neq 0. \quad (3)$$

Jest to silne założenie, wykluczające np. funkcje takie jak $x_2 = |x_1|^q$ dla $q > 2$. Naszym celem jest pozbycie się/złagodzenie warunku (3). W tym celu poszukiwać będziemy gęstości nie w przestrzeni W_p^1 , lecz w pewnej przestrzeni ułamkowej. Dokładnie interesować nas będzie rozwiązanie

$$v \in W_p^2, \varrho \in W_p^s, 1 > s > \frac{2}{p}.$$

Przy tych założeniach na s tw. Sobolewa o zanurzeniu daje $\varrho \in L^\infty$.

Lemat 1. Załóżmy że brzeg Ω w otoczeniu punktów osobliwych spełnia

$$|x_2(x_1) - x_2(y_1)| \geq C|x_1 - y_1|^M \quad (4)$$

dla pewnych $C > 0$, $N \in \mathbf{N}$. Niech w spełnia równanie

$$\begin{aligned} w + w_{x_1} &= H, \\ w|_{\Gamma_{in}} &= 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Wówczas istnieją p, s^* zależne od M takie że $s^* > \frac{2}{p}$ i jeżeli $H \in W_p^{s^*}$, $s^* > s > \frac{2}{p}$ to

$$\|w\|_{W_p^s} \leq C\|H\|_{W_p^{s^*}} \quad (6)$$

Jest możliwe wykorzystanie tego lematu w rozwiązywaniu naszego oryginalnego problemu. Równanie 5 możemy bowiem otrzymać z równania ciągłości przez analizę rotacji równania momentu i zastosowanie rozkładu Helmholtza pola prędkości.

Aby udowodnić (6) przypomnijmy, że norma W_p^s w \mathbb{R}^2 dla $0 < s < 1$ to:

Tę definicję możemy w oczywisty sposób przenieść na dostatecznie regularny zbiór $\Omega \subset \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} \|f\|_{W_p^s(\mathbb{R}^2)} &= \left(\int_{\mathbb{R}^2} \int_{[0,1]^2} \frac{|f(x+h) - f(x)|^p}{|h|^{2+sp}} dh dx \right)^{\frac{1}{p}} + \|f\|_{L_p}, \\ \|f\|_{W_p^s(\Omega)} &= \left(\int_{\mathbb{R}^2} \int_{(0,\delta(x))^2} \frac{|f(x+h) - f(x)|^p}{|h|^{2+sp}} dh dx \right)^{\frac{1}{p}} + \|f\|_{L_p}, \end{aligned}$$

gdzie $\delta(x)$ oznacza wartość w otoczeniu x .

Dwuwymiarową normę W_p^s możemy zastąpić jednowymiarowymi normami po współrzędnych, dokładnie mamy

Lemat 2. Następująca norma jest równoważna powyższej:

$$\begin{aligned} \|f\|_{W_p^s}^p &= \int \int_{(0,\delta)} \frac{|f(x_1+h, x_2) - f(x_1, x_2)|^p}{|h|^{1+sp}} dh dx_1 + \int \int_{(0,\delta)} \frac{|f(x_1, x_2+h) - f(x_1, x_2)|^p}{|h|^{1+sp}} dh dx_2 + \|f\|_{L_p}^p \\ &=: \|f\|_{W_p^s, L_p}^p + \|f\|_{L_p, W_p^s}^p \end{aligned}$$

Szkic dowodu (6). Zauważmy, że $w + w_{x_1} = e^{-x_1} \partial_{x_1} (e^{x_1} w)$. Ponadto, jeśli η jest dostatecznie regularną funkcją to

$$C_1 \|f\|_{W_p^s} < \|\eta f\|_{W_p^s} < C_2 \|f\|_{W_p^s}.$$

Dlatego wystarczy udowodnić (6) dla $w_{x_1} = H$. Mamy

$$\begin{aligned} w(x_1, x_2 + h) - w(x_1, x_2) &= \int_{\underline{x}_1(x_2+h)}^{x_1} H(t, x_2 + h) dt - \int_{\underline{x}_1(x_2+h)}^{x_1} H(t, x_2) dt \\ &= \int_{\underline{x}_1(x_2+h)}^{x_1} [H(t, x_2 + h) - H(t, x_2)] dt + \int_{\underline{x}_1(x_2+h)}^{x_1(x_2)} H(t, x_2 + h) dt =: I_1 + I_2 \end{aligned}$$

Zatem $|w(x_1, x_2 + h) - w(x_1, x_2)|^p \sim |I_1|^p + |I_2|^p$. Szacujemy I_2 :

$$\int dx_1 \int dx_2 \int_0^\delta \frac{|I_2|^p}{|h|^{1+sp}} dh =$$

$$\begin{aligned}
&\leq \int dx_1 \int dx_2 \int_0^\delta dh \frac{|\underline{x}_1(x_2) - \underline{x}_1(x_2 + h)|^{p-1} \int_{\underline{x}_1(x_2+h)}^{\underline{x}_1(x_2)} |H(t, x_2 + h)|^p dt}{|h|^{1+sp}} \\
&\leq \int dx_1 \int dx_2 \int_0^\delta dh \frac{\|H\|_{L^\infty}^p |\underline{x}_1(x_2) - \underline{x}_1(x_2 + h)|^p}{|h|^{1+sp}}.
\end{aligned}$$

Z warunku (4) dostajemy

$$|\underline{x}_1(x_2) - \underline{x}_1(x_2 + h)| \leq C|h|^\epsilon \quad (7)$$

dla pewnego $\epsilon > 0$. Dostajemy

$$\int dx_1 \int dx_2 \int_0^\delta \frac{|I_2|^p}{|h|^{1+sp}} dh \leq \|H\|_{L^\infty}^p \int dx_1 \int dx_2 \int_0^\delta |h|^{-1+p(\epsilon-s)}.$$

Ostatnia całka jest skończona dla $s < \epsilon$. Podobnie szacujemy I_1 , tym razem nie dostajemy ograniczeń na kształt brzegu. Dostajemy

$$\|w\|_{L_p, W_p^s} \leq C \|H\|_{L_p, W_p^s} \quad (8)$$

Z pomocą analogicznych rachunków wykazujemy bezpośrednio oszacowanie na $\|w\|_{W_p^s, L_p}$, co kończy dowód. \square

notował Jan Wróblewski, edytował Tomasz Piasecki