Seminarium Badawcze Zakładu Fizyki Matematycznej

O regularnych rozwiązaniach równań Naviera-Stokesa

Wojciech Zajączkowski (IM PAN)

20.10.2011

1 Równanie Naviera-Stokesa

Rozpatrujemy równanie Naviera-Stokesa dla cieczy nieściśliwej:

$$\begin{cases} v_t + v\nabla v - \operatorname{div}\Pi(v,p) = f, \\ \Pi(v,p) = \operatorname{div}\mathbb{D}(r) - pI, \\ \mathbb{D}(v) = \nabla v + (\nabla v)^T, \\ \operatorname{div} v = 0, \\ v|_{t=0} = v_0. \end{cases}$$

Dla słabych rozwiązań mamy oszacowanie

$$\int_\Omega v^2 dx + \int_0^T \int_\Omega |\nabla v|^2 \le \int_\Omega v_0^2 dx + c\int_0^T \int_\Omega f^2 dxdt,$$
$$v \in L_q(0,T,L_p(\Omega)), \quad \tfrac{3}{p} + \tfrac{2}{q} \ge \tfrac{3}{2},$$

a stąd warunek Serrina na gładkość słabych rozwiązań:

$$\frac{3}{p} + \frac{2}{q} = 1.$$

W dalszej części zajmiemy się szczególnymi rozwiązaniami równania Naviera-Stokesa, z warunkiem poślizgu:

$$\begin{cases} \overline{n}\mathbb{D}(v)\overline{\tau}_\alpha + \gamma v\overline{\tau}_\alpha|_S = 0, \\ v\overline{n}|_S = 0. \end{cases}$$

Rozważamy dwa szczególne przypadki:

- rozwiązania dwuwymiarowe,
- rozwiązania osiowo-symetryczne.

2 Rozwiązania regularne bliskie dwuwymiarowym

Można znaleźć rozwiązania regularne bliskie dwuwymiarowym, tj.

$$v \in W_2^{2,1}(\Omega^T).$$

Zakładając między innymi:

$$\|v\|_{W_2^{2,1}(\Omega\times(kT,(k+1)T))} \le A, \quad k \in \mathbb{N},$$
$$\|v_{,x_3}(0)\|_{L_2(\Omega)} + \|f_{,xy}\|_{L_2(\Omega^T)} \le \text{dostatecznie małe} \le \delta \Rightarrow \exists!\, v \in W_2^{2,1}(\Omega^T) \Rightarrow \|v_{,x_3}(T)\|_{L_2(\Omega)} + \|f_{,x_3}\|_{L_2(\Omega\times(T,2T))} \le \delta.$$

Mierzymy odległość od rozwiązania dwuwymiarowego za pomocą zmiennej $h = v_{,x_3}$. W efekcie udaje się uzyskać oszacowanie z użyciem pewnej funkcji φ:

$$\|h\|_{W_2^{2,1}(\Omega^T)} \le \varphi\left(\|h\|_{W_2^{2,1}(\Omega^T)}\right)\left(\|h(0)\|_{L_2(\Omega)} + \|f_{,x_3}\|_{L_2(\Omega)}\right) + \text{DANE}.$$

Istnienie rozwiązania uzyskujemy za pomocą punktu stałego. Da się przedłużyć je po czasie otrzymując rozwiązanie globalne pokazując:

$$\|v((k+1)T)\|_{H^1(\Omega)} \le \|v(hT)\|_{H^1(\Omega)},$$
$$\|h((k+1)T)\|_{H^1(\Omega)} \le \|h(kT)\|_{H^1(\Omega)}.$$

Z dalszej dyskusji wynikło, że nie wiadomo czy byłaby możliwa konstrukcja rozwiazań regularnych w przypadku płynu przepływającego przez inny zbiór niż walec. W szczególności podczas dowodu korzystano w wielu miejscach z zwartości przekroju tej bryły.

3 Nowe rozwiązania regularne dla przypadku osiowo-symetrycznego

Wprowadzamy układ cylindryczny współrzędnych, w którym prędkość zapisuje się v_r, v_φ, v_z. Klasyczny wynik Ładyżeńskiej głosi gładkość rozwiązań osiowo-symetrycznych, gdy $v_\varphi = 0$.

Autor uzyskał nowe oszacowania a priori implikujące dla przypadku osiowo-symetrycznego istnienie regularnych rozwiązań w otoczeniu osi bez zakladania, że $v_{,\varphi} = 0$.

notował Jan Wróblewski