



# Seminarium Badawcze Zakładu Fizyki Matematycznej

## Równania Naviera-Stokesa: od warunku Serrina do wymiaru zbioru punktów singularnych

Witold Sadowski (UW)

08.12.2011

Zajmujemy się następującym modelem:

$$\begin{cases} u_t - \Delta u + u \nabla u + \nabla p = 0, \\ \operatorname{div} u = 0, \\ u(0) = u_0, \\ u = 0, \quad \text{na } \partial\Omega, \end{cases}$$

gdzie:

$$\begin{aligned} \Omega &\subset \mathbb{R}^3, \\ u &\in L^\infty(0, T; H) \cap L^2(0, T; V), \\ H &= \overline{C_{0,\sigma}^\infty}^{L^2}, \\ V &= \overline{C_{0,\sigma}^\infty}^{H^1}. \end{aligned}$$

Problemem jest, że następująca nierówność energetyczna nie jest spełniona przez wszystkie słabe rozwiązania:

$$\|u(t)\|_{L^2}^2 + 2 \int_0^t \|\nabla u\|^2 \leq \|u(0)\|^2.$$

W dalszej części będziemy wykorzystywać warunek Serrina oraz Da Veiga.

**Lemat 1** (Warunek Serrina). *Jeżeli  $u \in L^w(0, T; L^s(\Omega))$ ,  $u_0 \in L^2$  oraz*

$$\frac{2}{w} + 3s = 1$$

*to  $u$  jest gładkie na przedziale  $(\epsilon, T)$  dla dowolnego dodatniego  $\epsilon$ .*

Ponadto dla  $L^4$  otrzymujemy nierówność energetyczną oraz dla  $L^5$  gładkość rozwiązań.

**Lemat 2** (Warunek Da Veiga). *Jeżeli  $u \in L^w(0, T; L^s(\Omega))$  oraz*

$$\frac{2}{w} + 3s = 2$$

*to  $u$  jest rozwiązaniem regularnym.*

Znany jest również warunek na lokalną gładkość rozwiązania.

Określmy czasoprzestrzeń w kształcie walca o wysokości (czasie)  $R^2$  oraz promieniu podstawy (przestrzeni)  $R$  o środku w  $\tau_0$ . Oznaczmy ją przez  $Q(\tau_0, R)$ .

Istnieje stała absolutna  $\varepsilon$  taka, że:

$$\int_{Q(0,1)} |u|^3 + |p|^{\frac{3}{2}} < \varepsilon \tag{1}$$

oraz jeżeli  $(u, p)$  jest dogodnym słabym rozwiązaniem, to  $u$  jest Hölderowsko ciągle w  $Q(0, \frac{1}{2})$ . Dobre rozwiązanie to takie, które spełnia warunek Leroya-Hopfa oraz posiada dwie dodatkowe własności:

- $p \in L^{\frac{5}{3}}(\Omega_T)$ ,
- spełnia lokalną nierówność energetyczną.

Przez skalowanie dla dowolnego punktu otrzymujemy:

$$\frac{1}{r^2} \int_{Q(\varepsilon, r)} |u|^3 + |\varphi|^{\frac{3}{2}} < \varepsilon.$$

Idea dowodu opiera się na twierdzeniu Campanata.

Otrzymujemy z tego za pomocą (1) regularność w  $\tau_0$ , gdy

$$\limsup_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r} \int_{Q(\tau_1, R)} |\nabla u|^2 < \varepsilon. \quad (2)$$

Obiektem badań przedstawianych na seminarium jest połączenie warunku Serrina, Da Veiga oraz (1), (2). Niech:

$$\begin{aligned} Y(\tau_1, R, u, p) &= Y^1(\tau_0, R, u) + RY^2(\tau_0, R, p), \\ Y^1(z_p, R, u) &= \left( \int_{Q(\tau_0, R)} |u \langle u \rangle_{Q(\tau_0, R)}|^3 \right)^{\frac{1}{3}}, \\ Y^2(z_0, R, p) &= \left( \int_{Q(\tau_0, R)} |p \langle p \rangle_{Q(\tau_0, R)}|^{\frac{3}{2}} \right)^{\frac{2}{3}}, \end{aligned}$$

gdzie  $u$  jest dogodnym rozwiązaniem.

**Lemat 3.** Dla ustalonego  $M > 3$  oraz  $\Theta \in (0, \frac{1}{2})$  istnieją  $\varepsilon_1(M, \Theta)$  i  $C_1(M)$  takie, że jeśli

$$|\langle v \rangle_{Q(1)}| \leq M$$

oraz

$$|Y(0, 1, v, p)| \leq \varepsilon_1$$

to

$$Y(0, \Theta, v, p) \leq C_1(M) Q^{\frac{2}{3}} Y(0, 1, v, p).$$

Możemy ten lemat stosować wiele razy dla coraz mniejszych cylindrów. Zostało wykazane istnienie dogodnego rozwiązania, ale jest to osobny temat.

Niech  $(u, p)$  jest dogodnym rozwiązaniem. Z (1) można uzyskać wymiary:

$$\begin{aligned} d_F(S) &\leq \frac{s}{3}, \\ d_H(S) &\leq 1, \end{aligned}$$

a dla regularnych rozwiązań

$$d_F(S) = d_H(S) = 0.$$

Wymiar zbioru singularnego przy poniższym warunku został uzyskany w pracy z Jamesem Robinsonem:

$$u \in L^w(0, T; L^s(\Omega)), \quad 1 < \frac{2}{w} + \frac{3}{s} < \frac{3}{2}. \quad (3)$$

**Twierdzenie 1.** Niech  $(u, p)$  będzie dogodnym rozwiązaniem w  $\mathbb{R}^3 \times (0, T)$  oraz niech zachodzi (3). Wtedy wymiar pudełkowy zbioru punktów singularnych posiada następujące oszacowanie:

$$d_F(S) \leq \max\{\sigma, s\} \left( \frac{2}{w} + \frac{3}{s} - 1 \right)$$

dla  $3 < w, s < \infty$ .

Dowód opiera się na połączeniu warunku Serrina z (1).

**Twierdzenie 2.** Niech  $(u, p)$  będzie dogodnym rozwiązaniem w  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  oraz niech zachodzi

$$u \in L^w(0, T; L^s(\Omega)), \quad 2 < \frac{2}{w} + \frac{3}{s} < \frac{5}{2}.$$

Wtedy wymiar Hausdorffa zbioru punktów singularnych posiada następujące oszacowanie:

$$d_H(S) \leq w \left( \frac{2}{w} + \frac{3}{s} - 2 \right)$$

dla  $2 < s < w < \infty$ .

Dowód opiera się na połączeniu warunku Da Veiga z (2).

Ponadto należy zaznaczyć, że w  $\mathbb{R}^3$  punkty singularne leżą w ograniczonym obszarze dla zwykłych warunków początkowych.

Wciąż otwartym problemem jest wzięcie ograniczonego obszaru w twierdzeniu 1 oraz pominięciu warunku  $s < w$  w twierdzeniu 2.

notował Jan Wróblewski