Algebraiczne kryteria linearyzacji oraz równoważność równań różniczkowych

Tomasz Czyżycki

Instytut Matematyki Uniwersytetu w Białymstoku

Zakład Równań Fizyki Matematycznej
Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki UW
Warszawa, 10 listopada 2011

Definicja

Niech $x \in \mathbb{R}^n$, $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, *niech* G *będzie grupą Liego przekształceń gładkiej rozmaitości* M *ze współrzędnymi* (x, u) *oraz niech* $\underset{m}{G}$ *oznacza przedłużenie działania grupy* G *na przestrzeń żetów odwzorowania* u, *czyli* $(x, u, \underset{1}{u}, \ldots, \underset{m}{u})$.

a) Funkcję $F(x, u)$ *nazywamy* **niezmiennikiem** *grupy* G *gdy:*

$$\forall_{\varphi \in G} \; F(\varphi(x, u)) = F(x, u).$$

b) Funkcję $F(x, u, \underset{1}{u}, \ldots, \underset{m}{u})$ *nazywamy* **niezmiennikiem różniczkowym** *(rzędu* m*) grupy* G *jeśli:*

$$\forall_{\underset{m}{\varphi} \in \underset{m}{G}} \; F(\underset{m}{\varphi}(x, u, \underset{1}{u}, \ldots, \underset{m}{u})) = F(x, u, \underset{1}{u}, \ldots, \underset{m}{u}).$$

Definicja, c.d.

c) Niech $X = \xi^i(x, u, \underset{1}{u}, \ldots, \underset{s}{u})\partial_{x_i} + \eta(x, u, \underset{1}{u}, \ldots, \underset{s}{u})\partial_u$ oznacza pole wektorowe,

$\underset{m}{X}$ oznacza przedłużenie m – tego rzędu pola X na przestrzeń żetów $(x, u, \underset{1}{u}, \underset{2}{u}, \ldots, \underset{m}{u})$ i jest zadane formułą:

$$\underset{m}{X} = X + \sum_{p=1}^{m} \zeta^{i_1,\ldots,i_p} \partial_{u_{x_{i_1,\ldots,i_p}}},$$

gdzie współczynniki $\zeta^{i_1,\ldots,i_p}$ są zdefiniowane następująco:

$$\zeta^{i_1,\ldots,i_p} = D_{i_1,\ldots,i_p}(\eta) - u_{x_{i_1},\ldots,x_{i_p},x_{i_k}} \cdot D_{i_1,\ldots,i_p}(\xi^k),$$

sumowanie jest względem k; $(i_1, i_2, \ldots, i_m)$ są ustalone,

Definicja, c.d.

Mając generator infinitezymalny X grupy Liego G można korzystać z infinitezymalnego kryterium niezmienniczości:

$$\underset{m}{X} F(x, u, \underset{1}{u}, ..., \underset{m}{u}) = 0.$$

d) X nazywamy operatorem symetrii równania różniczkowego $L(x, u, \underset{1}{u}, ..., \underset{m}{u}) = 0$, jeżeli zachodzi równość

$$\underset{m}{X} L\Big|_{L=0} = 0$$

Uwaga

Zbiór operatorów symetrii danego równania różniczkowego tworzy algebrę Liego z mnożeniem zadanym przez komutator.

Definicja, c.d.

Mając generator infinitezymalny X grupy Liego G można korzystać z infinitezymalnego kryterium niezmienniczości:

$$\underset{m}{X}F(x, u, \underset{1}{u}, ..., \underset{m}{u}) = 0.$$

d) X nazywamy operatorem symetrii równania różniczkowego $L(x, u, \underset{1}{u}, ..., \underset{m}{u}) = 0$, jeżeli zachodzi równość

$$\underset{m}{X}L\Big|_{L=0} = 0$$

Uwaga

Zbiór operatorów symetrii danego równania różniczkowego tworzy algebrę Liego z mnożeniem zadanym przez komutator.

Definicja

a) Maksymalny (względem ilości elementów) zbiór funkcjonalnie niezależnych niezmienników rzędu $r \leqslant m$ danej grupy Liego G nazywamy **bazą** *niezmienników rzędu m grupy G,*

b) Q nazywamy **operatorem niezmienniczego różniczkowania**, *jeśli dla każdego niezmiennika różniczkowego F grupy G wyrażenie QF też jest niezmiennikiem różniczkowym grupy G.*

c) Ogólnym niezmiennikiem różniczkowym rzędu s grupy Liego G nazywamy zbiór wszystkich jej niezmienników różniczkowych od rzędu zero do rzędu s włącznie.

Twierdzenie (Tresse, 1894)

Dla danej r–wymiarowej grupy Liego transformacji G $(r < +\infty)$, działającej w przestrzeni (x, u), $x \in V \subset \mathbb{R}^n$, $u : V \to \mathbb{R}$ istnieje skończona baza funkcjonalnie niezależnych niezmienników oraz istnieją operatory niezmienniczego różniczkowania Q takie, że dowolny niezmiennik skończonego rzędu grupy G może być otrzymany w skończonej ilości operacji funkcjonalnych oraz niezmienniczych różniczkowań niezmienników bazowych.

Całkowalność równań różniczkowych zwyczajnych drugiego rzędu, dopuszczających dwuwymiarowe algebry Liego symetrii punktowej

Rozważmy równanie różniczkowe zwyczajne drugiego rzędu w postaci normalnej

$$y'' = f(x, y, y'), \tag{1}$$

gdzie f jest dowolną, gładką funkcją swoich argumentów.

Twierdzenie

Maksymalny wymiar algebry Liego grupy Liego symetrii przekształceń punktowych równania różniczkowego (1) wynosi 8.

Pokażemy, że równanie różniczkowe zwyczajne drugiego rzędu postaci (1) dopuszczające dwuwymiarową grupę Liego symetrii punktowej jest całkowalne w kwadraturach.

Całkowalność równań różniczkowych zwyczajnych drugiego rzędu, dopuszczających dwuwymiarowe algebry Liego symetrii punktowej

Rozważmy równanie różniczkowe zwyczajne drugiego rzędu w postaci normalnej

$$y'' = f(x, y, y'), \tag{1}$$

gdzie f jest dowolną, gładką funkcją swoich argumentów.

Twierdzenie

Maksymalny wymiar algebry Liego grupy Liego symetrii przekształceń punktowych równania różniczkowego (1) wynosi 8.

Pokażemy, że równanie różniczkowe zwyczajne drugiego rzędu postaci (1) dopuszczające dwuwymiarową grupę Liego symetrii punktowej jest całkowalne w kwadraturach.

Lemat

Dowolna dwuwymiarowa algebra Liego pól wektorowych grupy Liego przekształceń punktowych przez odpowiedni wybór bazy może być sprowadzona do jednego z czterech poniższych typów:

1) $[X_1, X_2] = 0, \quad rank(X_1, X_2) = 2$
2) $[X_1, X_2] = 0, \quad rank(X_1, X_2) = 1$
3) $[X_1, X_2] = X_1, \quad rank(X_1, X_2) = 2$
4) $[X_1, X_2] = X_1, \quad rank(X_1, X_2) = 1$

gdzie $rank(X_1, X_2)$ *oznacza rząd macierzy współczynników pól wektorowych* X_1, X_2.

Niech równanie różniczkowe (1) dopuszcza dwuwymiarową algebrę Liego symetrii punktowej z bazą X_1, X_2.
Dokonując ewentualnej zamiany zmiennych i korzystając z powyższego lematu zapisujemy pola wektorowe X_1, X_2 w możliwie najprostszej postaci w zmiennych x, y. Wtedy równanie (1) zapisze się w niezmienniczej postaci:

Nr	Realizacja	Niezmienniki	Postać niezmienniczego równania
1	$\partial_x,\ \partial_y$	$y',\ y''$	$y'' = \widetilde{f}(y')$
2	$\partial_y,\ x\partial_y$	$x,\ y''$	$y'' = \widetilde{f}(x)$
3	$\partial_y,\ x\partial_x + y\partial_y$	$y',\ xy''$	$y'' = \frac{1}{x}\widetilde{f}(y')$
4	$\partial_y,\ y\partial_y$	$x,\ \frac{y''}{y'}$	$y'' = \widetilde{f}(x)y'$

Dla każdej z powyższych postaci równań różniczkowych drugiego rzędu można łatwo podać metodę ich całkowania w kwadraturach.

Niech równanie różniczkowe (1) dopuszcza dwuwymiarową algebrę Liego symetrii punktowej z bazą X_1, X_2.
Dokonując ewentualnej zamiany zmiennych i korzystając z powyższego lematu zapisujemy pola wektorowe X_1, X_2 w możliwie najprostszej postaci w zmiennych x, y. Wtedy równanie (1) zapisze się w niezmienniczej postaci:

Nr	Realizacja	Niezmienniki	Postać niezmienniczego równania
1	$\partial_x,\ \partial_y$	$y',\ y''$	$y'' = \widetilde{f}(y')$
2	$\partial_y,\ x\partial_y$	$x,\ y''$	$y'' = \widetilde{f}(x)$
3	$\partial_y,\ x\partial_x + y\partial_y$	$y',\ xy''$	$y'' = \dfrac{1}{x}\widetilde{f}(y')$
4	$\partial_y,\ y\partial_y$	$x,\ \dfrac{y''}{y'}$	$y'' = \widetilde{f}(x)y'$

Dla każdej z powyższych postaci równań różniczkowych drugiego rzędu można łatwo podać metodę ich całkowania w kwadraturach.

2. Algebraiczne kryteria linearyzacji równań różniczkowych cząstkowych drugiego rzędu

Rozważmy równanie różniczkowe cząstkowe drugiego rzędu o dwóch zmiennych niezależnych $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ w ogólnej postaci :

$$\Phi(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}) = 0 \tag{2}$$

oraz w postaci

$$\Psi(u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}) = 0 \tag{3}$$

Wiadomo, że równanie różniczkowe cząstkowe w postaci (3) lub w postaci równoważnej

$$u_{xx} = F(u_{xy}, u_{yy}) \tag{4}$$

jest linearyzowalne.

I. Tsyfra *Non-local ansätze for nonlinear heat and wave equations.* J.Phys. A **30** (1997), no. 6, 2251–2262,

2. Algebraiczne kryteria linearyzacji równań różniczkowych cząstkowych drugiego rzędu

Rozważmy równanie różniczkowe cząstkowe drugiego rzędu o dwóch zmiennych niezależnych $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ w ogólnej postaci :

$$\Phi(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}) = 0 \tag{2}$$

oraz w postaci

$$\Psi(u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}) = 0 \tag{3}$$

Wiadomo, że równanie różniczkowe cząstkowe w postaci (3) lub w postaci równoważnej

$$u_{xx} = F(u_{xy}, u_{yy}) \tag{4}$$

jest linearyzowalne.

I. Tsyfra *Non-local ansätze for nonlinear heat and wave equations.* J.Phys. A **30** (1997), no. 6, 2251–2262, Pokazano, że warunkiem wystarczającym linearyzowalności równania cząstkowego drugiego rzędu o dwóch zmiennych niezależnych jest posiadanie pewnej realizacji algebry Liego $A_{5.4}$ jako podalgebry symetrii z relacjami komutacyjnymi:

$$[e_1, e_4] = e_3, \quad [e_2, e_5] = e_3,$$

Pokazano, że warunkiem wystarczającym linearyzowalności równania cząstkowego drugiego rzędu o dwóch zmiennych niezależnych jest posiadanie jako podalgebry symetrii pewnej realizacji algebry $A_{5.19,(1,1)}$, zawierającej trójwymiarową abelową podalgebrę rzędu 3 z relacjami komutacyjnymi:

$$[e_1, e_4] = e_3, \quad [e_1, e_6] = e_1, \quad [e_2, e_6] = e_2, \quad [e_3, e_6] = 2e_3, \quad [e_4, e_6] = e_4$$

(w pozostałych przypadkach $[e_i, e_j] = 0$).

Powyższe podejście można uogólnić na równania z trzema zmiennymi niezależnymi

$$\Phi(t, x, y, u, u_t, u_x, u_y, u_{tt}, u_{tx}, u_{xx}, u_{ty}, u_{xy}, u_{yy}) = 0.$$

Pokazano, że wtedy warunkiem wystarczającym całkowalności równania cząstkowego drugiego rzędu o trzech zmiennych niezależnych jest posiadanie jako podalgebry symetrii pewnej realizacji siedmiowymiarowej algebry Liego, w której istnieje czterowymiarowa abelowa podalgebra rzędu 4.

Przykład

Rozważmy następującą rodzinę równań różniczkowych

$$u_{xy} + a(x,y)u_x + b(x,y)u_y + c(x,y)u = 0. \tag{5}$$

Transformacją równoważności *tej rodziny równań nazwiemy nieosobliwą zamianę zależnych i niezależnych zmiennych, zachowującą tę rodzinę, tzn. przekształcającą każde równanie postaci (5) w pewne równanie*

$$\widetilde{u}_{\widetilde{x}\widetilde{y}} + \widetilde{a}(\widetilde{x},\widetilde{y})\widetilde{u}_{\widetilde{x}} + \widetilde{b}(\widetilde{x},\widetilde{y})\widetilde{u}_{\widetilde{y}} + \widetilde{c}(\widetilde{x},\widetilde{y})\widetilde{u} = 0 \tag{6}$$

z tej rodziny, być może z innymi współczynnikami $\widetilde{a}, \widetilde{b}, \widetilde{c}$.

Dwa równania z tej rodziny nazywamy **równoważnymi**, gdy istnieje transformacja równoważności przekształcająca jedno równanie w drugie.

Przykład

Rozważmy następującą rodzinę równań różniczkowych

$$u_{xy} + a(x,y)u_x + b(x,y)u_y + c(x,y)u = 0. \tag{5}$$

Transformacją równoważności *tej rodziny równań nazwiemy nieosobliwą zamianę zależnych i niezależnych zmiennych, zachowującą tę rodzinę, tzn. przekształcającą każde równanie postaci (5) w pewne równanie*

$$\widetilde{u}_{\widetilde{x}\widetilde{y}} + \widetilde{a}(\widetilde{x},\widetilde{y})\widetilde{u}_{\widetilde{x}} + \widetilde{b}(\widetilde{x},\widetilde{y})\widetilde{u}_{\widetilde{y}} + \widetilde{c}(\widetilde{x},\widetilde{y})\widetilde{u} = 0 \tag{6}$$

z tej rodziny, być może z innymi współczynnikami $\widetilde{a}, \widetilde{b}, \widetilde{c}$.

Dwa równania z tej rodziny nazywamy **równoważnymi**, gdy istnieje transformacja równoważności przekształcająca jedno równanie w drugie.

Uwaga

Transformacje równoważności danej rodziny równań różniczkowych tworzą grupę, nazywaną grupą równoważności. Z tej grupy można wydzielić ciągłą podgrupę, która da się zapisać przy pomocy generatora infinitezymalnego.

Przykład, c.d.

Algebra Liego grupy Liego przekształceń równoważności rodziny równań (5) jest generowana przez operatory postaci:

$$Y = \xi(x)\frac{\partial}{\partial x} + \eta(y)\frac{\partial}{\partial y} + \sigma(x,y)u\frac{\partial}{\partial u} + \mu^1\frac{\partial}{\partial a} + \mu^2\frac{\partial}{\partial b} + \mu^3\frac{\partial}{\partial c}$$

gdzie

$$\mu^1 = -(\sigma_y + a\eta')$$

$$\mu^2 = -(\sigma_x + b\xi')$$

$$\mu^3 = -(\sigma_{xy} + a\sigma_x + b\sigma_y + c\eta' + c\xi')$$

Uwaga

Transformacje równoważności danej rodziny równań różniczkowych tworzą grupę, nazywaną grupą równoważności. Z tej grupy można wydzielić ciągłą podgrupę, która da się zapisać przy pomocy generatora infinitezymalnego.

Przykład, c.d.

Algebra Liego grupy Liego przekształceń równoważności rodziny równań (5) jest generowana przez operatory postaci:

$$Y = \xi(x)\frac{\partial}{\partial x} + \eta(y)\frac{\partial}{\partial y} + \sigma(x,y)u\frac{\partial}{\partial u} + \mu^1\frac{\partial}{\partial a} + \mu^2\frac{\partial}{\partial b} + \mu^3\frac{\partial}{\partial c}$$

gdzie

$$\mu^1 = -(\sigma_y + a\eta')$$

$$\mu^2 = -(\sigma_x + b\xi')$$

$$\mu^3 = -(\sigma_{xy} + a\sigma_x + b\sigma_y + c\eta' + c\xi')$$

Dla równania postaci (5) definiujemy tzw. **niezmienniki Laplace'a**:

$$h = a_x + ab - c, \qquad k = b_y + ab - c$$

Są one niezmiennikami grupy równoważności tych równań a warunki $h = 0$ lub $k = 0$ wystarczają do ich całkowalności w kwadraturach. Stąd pojawiła się idea wykorzystania niezmienników do badań równoważności, całkowalności i linearyzacji równań cząstkowych.

Rzeczywiście, jeżeli $h = 0$, to równanie (5) można sfaktoryzować i zapisać w postaci

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + b\right)\left(\frac{\partial u}{\partial x} + au\right) = 0$$

następnie podstawiając $v = u_x + au$ sprowadzić je do równania I rzędu i scałkować. Rozwiązanie ogólne ma wtedy postać:

$$u = \left[A(x) + \int B(y) e^{\int ady - bdx} dy\right] e^{-\int ady}$$

gdzie $A(x), B(y)$ są dowolnymi, gładkimi funkcjami.

Dla równania postaci (5) definiujemy tzw. **niezmienniki Laplace'a**:

$$h = a_x + ab - c, \qquad k = b_y + ab - c$$

Są one niezmiennikami grupy równoważności tych równań a warunki $h = 0$ lub $k = 0$ wystarczają do ich całkowalności w kwadraturach. Stąd pojawiła się idea wykorzystania niezmienników do badań równoważności, całkowalności i linearyzacji równań cząstkowych.

Rzeczywiście, jeżeli $h = 0$, to równanie (5) można sfaktoryzować i zapisać w postaci

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + b\right)\left(\frac{\partial u}{\partial x} + au\right) = 0$$

następnie podstawiając $v = u_x + au$ sprowadzić je do równania I rzędu i scałkować. Rozwiązanie ogólne ma wtedy postać:

$$u = \left[A(x) + \int B(y) e^{\int ady - bdx} dy\right] e^{-\int ady}$$

gdzie $A(x), B(y)$ są dowolnymi, gładkimi funkcjami.

Algebra Liego grupy Liego przekształceń równoważności równań Schrödingera

Rozważmy równania Schrödingera postaci

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} + \Delta\psi + W(t, \vec{x}, |\psi|)\psi = 0 \tag{7}$$

Algebra Liego grupy równoważności tych równań jest nieskończenie wymiarowa i ma bazowe elementy postaci:

$$J_{ab} = x_a\frac{\partial}{\partial x_b} - x_b\frac{\partial}{\partial x_a},$$

$$Q_a = U_a(t)\frac{\partial}{\partial x_a} + \frac{i}{2}\dot{U}_a x_a\left(\psi\frac{\partial}{\partial\psi} - \psi^*\frac{\partial}{\partial\psi^*}\right) + \frac{1}{2}\ddot{U}_a x_a\frac{\partial}{\partial W},$$

$$Q_A = 2A(t)\frac{\partial}{\partial t} + \dot{A}x_c\frac{\partial}{\partial x_c} + \frac{i}{4}\ddot{A}x_c x_c\left(\psi\frac{\partial}{\partial\psi} - \psi^*\frac{\partial}{\partial\psi^*}\right) +$$

$$-\frac{n\dot{A}}{2}\left(\psi\frac{\partial}{\partial\psi} + \psi^*\frac{\partial}{\partial\psi^*}\right) + \left(\frac{1}{4}\dddot{A}\,x_c x_c - 2W\cdot\dot{A}\right)\frac{\partial}{\partial W}\ ,$$

$$Q_B = iB(t)\left(\psi\frac{\partial}{\partial\psi} - \psi^*\frac{\partial}{\partial\psi^*}\right) + \dot{B}\frac{\partial}{\partial W}, \qquad Z_1 = \psi\frac{\partial}{\partial\psi}, \quad Z_2 = \psi^*\frac{\partial}{\partial\psi^*},$$

gdzie $U_a(t)$, $A(t)$, $B(t)$ są dowolnymi, gładkimi funkcjami argumentu t, względem c jest sumowanie od 1 do n.

Transformacje grupowe generowane przez operator Q_A są postaci:

$$t' = \tilde{A}^{-1}(2a + \tilde{A}(t))$$

gdzie $\tilde{A}(s) = \int \frac{ds}{A(s)}$,

$$x_c' = x_c \cdot \sqrt{\frac{A(t')}{A(t)}}$$

$$\psi' = \psi \cdot \left(\frac{A(t)}{A(t')}\right)^{\frac{n}{4}} \cdot \exp\left(\frac{i\vec{x}^{\,2}\,(\dot{A}(t') - \dot{A}(t))}{8A(t)}\right)$$

$$\psi^{*\,\prime} = \psi^* \cdot \left(\frac{A(t)}{A(t')}\right)^{\frac{n}{4}} \cdot \exp\left(\frac{-i\vec{x}^{\,2}\,(\dot{A}(t') - \dot{A}(t))}{8A(t)}\right)$$

$$W' = \frac{\vec{x}^{\,2}}{8A(t) \cdot A(t')} \cdot \int\limits_t^{t'} \dddot{A}(s) \cdot A(s) ds + \frac{A(t)}{A(t')} \cdot W$$

Składając transformacje potencjału generowane przez pełną grupę równoważności równań (7) otrzymujemy ogólną postać nowego potencjału:

$$W' = \vec{x}^{\,2} \cdot \alpha_1(t) + x_c \cdot \beta_c(t) + \alpha_2(t) + \alpha_3(t) \cdot W,$$

gdzie α_i, β_c są dowolnymi gładkimi funkcjami zależnymi od t.

Generowanie nowych rozwiązań i potencjałów

Jeżeli $\psi(x)$ spełnia równanie stacjonarne:

$$-\Delta\psi - V(x)\psi = E_n\psi$$

to

$$\Psi(t,x) = e^{-iE_n t'} \cdot \psi\left(\vec{x}\cdot\sqrt{\frac{A(t')}{A(t)}}\right)\cdot\left(\frac{A(t')}{A(t)}\right)^{\frac{n}{4}} \cdot \exp\left(\frac{-i\vec{x}^{\,2}\,(\dot{A}(t') - \dot{A}(t))}{8A(t)}\right)$$

spełnia równanie niestacjonarne z potencjałem:

$$W(t,x) = -\frac{\vec{x}^{\,2}}{8A^2(t)} \cdot \int_t^{t'} \dddot{A}(s)\cdot A(s)ds + \frac{A(t')}{A(t)} \cdot V\left(x\cdot\sqrt{\frac{A(t')}{A(t)}}\right)$$

4. Przekształcenia równoważności i całkowalność liniowych równań różniczkowych zwyczajnych drugiego rzędu

Rozważmy rodzinę równań różniczkowych zwyczajnych drugiego rzędu:

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = 0 \tag{8}$$

Algebra Liego grupy Liego przekształceń równoważności tej rodziny równań jest generowana przez operatory

$$X = \xi(x)\partial_x + \eta(x)y\partial_y + (\xi'' - a\xi' - 2\eta')\partial_a - (2b\xi' + \eta'' + a\eta')\partial_b$$

Można wyznaczyć niezmienniki przekształceń generowanych przez operatory X_1 przy $\eta = 0$

$$X_1 = \xi(x)\partial_x + (\xi'' - a\xi')\partial_a - 2b\xi'\partial_b \tag{9}$$

oraz X_2 przy $\xi = 0$

$$X_2 = \eta(x)y\partial_y - 2\eta'\partial_a - (\eta'' + a\eta')\partial_b. \tag{10}$$

4. Przekształcenia równoważności i całkowalność liniowych równań różniczkowych zwyczajnych drugiego rzędu

Rozważmy rodzinę równań różniczkowych zwyczajnych drugiego rzędu:

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = 0 \tag{8}$$

Algebra Liego grupy Liego przekształceń równoważności tej rodziny równań jest generowana przez operatory

$$X = \xi(x)\partial_x + \eta(x)y\partial_y + (\xi'' - a\xi' - 2\eta')\partial_a - (2b\xi' + \eta'' + a\eta')\partial_b$$

Można wyznaczyć niezmienniki przekształceń generowanych przez operatory X_1 przy $\eta = 0$

$$X_1 = \xi(x)\partial_x + (\xi'' - a\xi')\partial_a - 2b\xi'\partial_b \tag{9}$$

oraz X_2 przy $\xi = 0$

$$X_2 = \eta(x)y\partial_y - 2\eta'\partial_a - (\eta'' + a\eta')\partial_b. \tag{10}$$

Niezmiennikami operatora X_1 są funkcje:

$$\omega_{10} = y,\ \omega_{11} = a\xi - \xi',\ \omega_{12} = b\xi^2,\ \omega_{13} = \frac{a^2}{b} + \frac{ab'}{b^2} + \frac{b'^{\,2}}{4b^3}.$$

Operatorem niezmienniczego różniczkowania podgrupy generowanej przez X_1 jest

$$Q_1 = \frac{1}{\sqrt{|b|}} D_x$$

Niezmiennikami operatora X_2 są funkcje:

$$\omega_{20} = x,\ \omega_{21} = a^2 - 4b + \frac{2\eta'' a}{\eta'},\ \omega_{22} = a + 2\frac{\eta'}{\eta}\ln y,\ \omega_{23} = a^2 - 4b + 2a'.$$

Operatorem niezmienniczego różniczkowania podgrupy generowanej przez X_2 jest

$$Q_2 = D_x$$

Za ich pomocą można sformułować warunek konieczny sprowadzenia jednego równania w drugie za pomocą punktowej zamiany zmiennych.

Niezmiennikami operatora X_1 są funkcje:

$$\omega_{10} = y,\ \omega_{11} = a\xi - \xi',\ \omega_{12} = b\xi^2,\ \omega_{13} = \frac{a^2}{b} + \frac{ab'}{b^2} + \frac{b'^{\,2}}{4b^3}.$$

Operatorem niezmienniczego różniczkowania podgrupy generowanej przez X_1 jest

$$Q_1 = \frac{1}{\sqrt{|b|}} D_x$$

Niezmiennikami operatora X_2 są funkcje:

$$\omega_{20} = x,\ \omega_{21} = a^2 - 4b + \frac{2\eta'' a}{\eta'},\ \omega_{22} = a + 2\frac{\eta'}{\eta} \ln y,\ \omega_{23} = a^2 - 4b + 2a'.$$

Operatorem niezmienniczego różniczkowania podgrupy generowanej przez X_2 jest

$$Q_2 = D_x$$

Za ich pomocą można sformułować warunek konieczny sprowadzenia jednego równania w drugie za pomocą punktowej zamiany zmiennych.

Twierdzenie

Niech $\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n$, gdzie $\omega_i = \omega_i(x, a, b, a', b', ..., a^{(k)}, b^{(k)})$ dla pewnego $k \in \mathbb{N}$, będą niezmiennikami różniczkowymi grupy Liego generowanej przez operator (10).
Załóżmy, że równanie (8) gdzie $a = a_1(x), b = b_1(x)$ może być przekształcone zamianą zmiennych z tej grupy Liego w równanie (8) gdzie $a = a_2(x), b = b_2(x)$ i niech

$$H(\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n)\Big|_{\substack{a=a_1(x)\\ b=b_1(x)}} = \lambda = const.,$$

dla pewnej gładkiej funkcji H.
Wtedy

$$H(\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n)\Big|_{\substack{a=a_2(x)\\ b=b_2(x)}} = \lambda.$$

Przykład

Rozważmy równania

$$y''(x) + \frac{1}{x}y'(x) + 4xy(x) = 0$$

oraz

$$z''(t) + 4e^{-3t}z(t) = 0.$$

Zbadamy, czy równania te są równoważne oraz, jeżeli są równoważne, wyznaczymy przekształcenia równoważności sprowadzającą jedno równanie w drugie.

Niezmienniki operatora X_1 odpowiadające pierwszemu równaniu mają postać

$$\omega_{13} = \frac{9}{16x^3}, \quad \omega_{14} = \frac{27}{32x^4\sqrt{x}}.$$

Niezmiennikami odpowiadającymi drugiemu równaniu są funkcje

$$\omega_{23} = \frac{9}{16}e^{3t}, \quad \omega_{24} = \frac{27}{32}e^{\frac{9}{2}t}.$$

Przykład

Rozważmy równania

$$y''(x) + \frac{1}{x}y'(x) + 4xy(x) = 0$$

oraz

$$z''(t) + 4e^{-3t}z(t) = 0.$$

Zbadamy, czy równania te są równoważne oraz, jeżeli są równoważne, wyznaczymy przekształcenia równoważności sprowadzającą jedno równanie w drugie.
Niezmienniki operatora X_1 odpowiadające pierwszemu równaniu mają postać

$$\omega_{13} = \frac{9}{16x^3}, \quad \omega_{14} = \frac{27}{32x^4\sqrt{x}}.$$

Niezmiennikami odpowiadającymi drugiemu równaniu są funkcje

$$\omega_{23} = \frac{9}{16}e^{3t}, \quad \omega_{24} = \frac{27}{32}e^{\frac{9}{2}t}.$$

Przykład c.d.

Stąd otrzymujemy niezmiennicze kombinacje

$$H_1(\omega_{13}, \omega_{14}) = \frac{4\omega_{13}^3}{\omega_{14}^2} = 1,$$

$$H_2(\omega_{23}, \omega_{24}) = \frac{4\omega_{23}^3}{\omega_{24}^2} = 1$$

i stwierdzamy, że badane równania są równoważne względem przekształceń generowanych przez X_1.

Następnie możemy wyznaczyć przekształcenia równoważności poprzez porównanie ω_{13} oraz ω_{23}, co daje $x = e^{-t}$. Łatwo sprawdzić, że zamiana zmiennych

$$\begin{cases} x = e^{-t} \\ y = z \end{cases}$$

sprowadza jedno równanie w drugie.

Przykład c.d.

Stąd otrzymujemy niezmiennicze kombinacje

$$H_1(\omega_{13}, \omega_{14}) = \frac{4\omega_{13}^3}{\omega_{14}^2} = 1,$$

$$H_2(\omega_{23}, \omega_{24}) = \frac{4\omega_{23}^3}{\omega_{24}^2} = 1$$

i stwierdzamy, że badane równania są równoważne względem przekształceń generowanych przez X_1.

Następnie możemy wyznaczyć przekształcenia równoważności poprzez porównanie ω_{13} oraz ω_{23}, co daje $x = e^{-t}$. Łatwo sprawdzić, że zamiana zmiennych

$$\begin{cases} x = e^{-t} \\ y = z \end{cases}$$

sprowadza jedno równanie w drugie.

Przekształcenia równoważności rodziny równań Riccatiego

Rozważmy rodzinę równań różniczkowych Riccatiego ze zmiennymi współczynnikami $a(x), b(x), c(x)$:

$$y' = a(x)y^2 + b(x)y + c(x). \tag{11}$$

Przekształceniem równoważności rodziny równań Riccatiego (11) nazywamy nieosobliwą zamianę zmiennych

$$\widetilde{x} = \alpha(x, y),\ \ \widetilde{y} = \beta(x, y), \tag{12}$$

zachowującą zbiór

$$\Omega_R = \{y' = a(x)y^2 + b(x)y + c(x) :\ \ y, a, b, c : V \to \mathbb{R},\ \ V \subseteq \mathbb{R}\}, \tag{13}$$

tzn. przekształcającą każde równanie $y' = a(x)y^2 + b(x)y + c(x) \in \Omega_R$ w równanie

$$\widetilde{y}\,' = \widetilde{a}(\widetilde{x})\widetilde{y}\,^2 + \widetilde{b}(\widetilde{x})\widetilde{y} + \widetilde{c}(\widetilde{x}) \in \Omega_R, \tag{14}$$

gdzie funkcje $\widetilde{a}, \widetilde{b}, \widetilde{c}$ mogą być różne od a, b, c.

Twierdzenie

Algebra Liego $\mathcal{A}$ grupy Liego G_R ma bazowe elementy postaci

$$X = A(x)\partial_x + \big(B(x)y^2 - C(x)y + D(x)\big)\partial_y +$$

$$+\big((C(x) - A'(x))a + B(x)b + B'(x)\big)\partial_a +$$

$$+\big(2B(x)c - 2D(x)a - A'(x)b - C'(x)\big)\partial_b +$$

$$+\big(D'(x) - D(x)b - (A'(x) + C(x))c\big)\partial_c,$$

gdzie $A(x), B(x), C(x), D(x)$ są dowolnymi gładkimi funkcjami zmiennej x.

Przekształcenia grupowe, generowane przez $X_A = A\partial_x - A' a\,\partial_a - A' b\,\partial_b - A' c\,\partial_c$ dla $B = C = D = 0$ są postaci

$$\begin{cases} \widetilde{x} = \widetilde{A}^{-1}(\varepsilon + \widetilde{A}(x)) = \alpha(x), \\ \widetilde{y} = y, \end{cases}$$

Twierdzenie

Algebra Liego $\mathcal{A}$ grupy Liego G_R ma bazowe elementy postaci

$$X = A(x)\partial_x + \big(B(x)y^2 - C(x)y + D(x)\big)\partial_y +$$

$$+\big((C(x) - A'(x))a + B(x)b + B'(x)\big)\partial_a +$$

$$+\big(2B(x)c - 2D(x)a - A'(x)b - C'(x)\big)\partial_b +$$

$$+\big(D'(x) - D(x)b - (A'(x) + C(x))c\big)\partial_c,$$

gdzie $A(x), B(x), C(x), D(x)$ są dowolnymi gładkimi funkcjami zmiennej x.

Przekształcenia grupowe, generowane przez
$X_A = A\partial_x - A'a\,\partial_a - A'b\,\partial_b - A'c\,\partial_c$ dla $B = C = D = 0$ są postaci

$$\begin{cases} \widetilde{x} = \widetilde{A}^{-1}(\varepsilon + \widetilde{A}(x)) = \alpha(x), \\ \widetilde{y} = y, \end{cases}$$

Dla $X_B = By^2\partial_y + (Bb + B')\partial_a + 2Bc\,\partial_b$, $(A = C = D = 0)$ mamy

$$\begin{cases} \widetilde{x} = x, \\ \widetilde{y} = \dfrac{y}{1 - \varepsilon B(x)y}. \end{cases}$$

Dla $X_C = -Cy\partial_y + Ca\,\partial_a - C'\partial_b - Cc\,\partial_c$, $(A = B = D = 0)$ mamy

$$\begin{cases} \widetilde{x} = x, \\ \widetilde{y} = ye^{-\varepsilon C(x)}. \end{cases}$$

Dla $X_D = D\partial_y - 2Da\,\partial_b + (D' - Db)\partial_c$, $(A = B = C = 0)$ mamy

$$\begin{cases} \widetilde{x} = x, \\ \widetilde{y} = y + \varepsilon D(x). \end{cases}$$

Niezmienniki przekształceń równoważności rodziny równań Riccatiego

Ze względu na to, że niezmienniki całej grupy G_R nie istnieją, wyznaczamy niezmienniki pewnych podgrup grupy G_R.
W szczególności podgrup generowanych przez operatory X_A, X_B, X_C, X_D.

Baza podalgebry	Bazowe niezmienniki: ze zmienną y	Bazowe niezmienniki: ze zmiennymi a, b, c (bez x, y)	Niezmiennicze różniczkowanie
X_A	y	$\frac{b}{a},\ \frac{c}{a}$	$\frac{1}{a}D_x$
X_B	$\frac{b}{2c}+\frac{1}{y}$	$c,\ 2ac-\frac{1}{2}b^2-b'+b\frac{c'}{c}$	D_x
X_C	ay	$ac,\ \frac{a'}{a}+b$	D_x
X_D	$\frac{b}{a}+2y$	$a,\ 2ac-\frac{1}{2}b^2+b'-b\frac{a'}{a}$	D_x
(X_A, X_B)	$\frac{b}{2c}+\frac{1}{y}$	$\frac{2a}{c}+\frac{b^2}{2c^2}-\frac{b'c-bc'}{c^3}$	$\frac{1}{c}D_x$
(X_A, X_C)	$\frac{ay^2}{c}$	$\frac{1}{\sqrt{\lvert ac\rvert}}\left(\frac{a'}{a}-\frac{c'}{c}+2b\right)$	$\frac{1}{\sqrt{\lvert ac\rvert}}D_x$
(X_A, X_D)	$\frac{b}{a}+2y$	$2\frac{c}{a}-\frac{b^2}{2a^2}+\frac{b'a-ba'}{a^3}$	$\frac{1}{a}D_x$
(X_B, X_C)	$\frac{2c}{y}+b-\frac{c'}{c}$	$b^2-4ac+2b'-2\frac{c''}{c}+3\frac{c'^2}{c^2}-2\frac{bc'}{c}$	D_x
(X_C, X_D)	$2ay+b+\frac{a'}{a}$	$b^2-4ac-2b'-2\frac{a''}{a}+3\frac{a'^2}{a^2}+2\frac{ba'}{a}$	D_x

Przykład - badanie równoważności równań Riccatiego

Zbadamy równoważność następujących równań

$$y' = y^2 - 2x^2 y + x^4 + 2x + 4, \quad z' = 3t^2 z^2 - 6t^8 z + 3t^{14} + 6t^5 + 12t^2$$

W tym celu porównujemy niezmienniki poszczególnych podgrup grupy G_R, poczynając od transformacji zawierających jedną dowolną funkcję. Ponieważ funkcje a, c, ac nie są niezmiennikami wnioskujemy, że w tym przypadku nie wystarczą przekształcenia generowane przez X_B, X_C, X_D. Następnie badamy niezmienniki przekształceń generowanych przez X_A oraz ich niezmiennicze kombinacje dla pierwszego równania.

$$\omega_{11} = \frac{b_1}{a_1} = -2x^2, \quad \omega_{12} = \frac{c_1}{a_1} = x^4 + 2x + 4.$$

Niezmienniki powyższe zależą od x, więc wyznaczamy ich niezmiennicze kombinacje.

Przykład cd.

Ponieważ $x = \sqrt{\left|\frac{\omega_{11}}{-2}\right|}$ oraz $\omega_{12} = \frac{\omega_{11}^2}{4} + 2\sqrt{\left|\frac{\omega_{11}}{-2}\right|} + 4$, więc niezmienniczą kombinacją jest funkcja

$$\Phi_1(\omega_{11}, \omega_{12}) = \omega_{12} - \frac{\omega_{11}^2}{4} - 2\sqrt{\left|\frac{\omega_{11}}{-2}\right|} = 4.$$

Z drugiego równania otrzymujemy semi–niezmienniki

$$\omega_{21} = \frac{b_2}{a_2} = -2t^6, \quad \omega_{22} = \frac{c_2}{a_2} = t^{12} + 2t^3 + 4$$

oraz niezmienniczą kombinację

$$\Phi_2(\omega_{21}, \omega_{22}) = \omega_{22} - \frac{\omega_{21}^2}{4} - 2\sqrt{\left|\frac{\omega_{21}}{-2}\right|} = t^{12} + 2t^3 + 4 - t^{12} - 2\sqrt{t^6} = 4.$$

Przykład cd.

Niezmiennicze kombinacje zbudowane z bazowych niezmienników tej podgrupy są identyczne. Ponadto przekształcenia równoważności badanych równań zadaje pewna zamiana zmiennej niezależnej, którą wyznaczymy przy użyciu niezmienników zawierających tę zmienną.

$$x = \sqrt{\left|\frac{\omega_{11}}{-2}\right|} = \sqrt{\left|\frac{\omega_{21}}{-2}\right|} = t^3.$$

Bezpośrednim rachunkiem przekonujemy się, że taka zamiana zmiennej x przekształca jedno równanie w drugie.

5. Niezmiennicze potencjały dla grupy symetrii równania Schrödingera z dwoma dyskretnymi parametrami

Weźmy równanie Schrödingera postaci:

$$i\psi_t + \psi_{x_1x_1} + \psi_{x_2x_2} + W(t, \vec{x}, |\psi|)\psi = 0$$

Można wyznaczyć zmienną kanoniczną i niezmienniki oraz skonstruować niezmiennicze potencjały dla dwuwymiarowej podalgebry symetrii

$D = 2t\partial_t + x_c\partial_{x_c} - 2W\partial_W$ i $J_{12} = x_2\partial_{x_1} - x_1\partial_{x_2}$.

$$\gamma_1 = \ln\sqrt{x_1^2 + x_2^2} - \operatorname{arc\,tg}\frac{x_2}{x_1}$$

Ogólna postać niezmienniczego potencjału to:

$$W = \frac{1}{x_1^2 + x_2^2} \cdot G\left(\frac{t}{x_1^2 + x_2^2}, |\psi|, \gamma\right).$$

Uwaga

W podanym przykładzie rozważana podalgebra algebry Liego jest abelowa. Jednak przemienność nie jest warunkiem koniecznym istnienia zmiennej kanonicznej dla takiej podalgebry. Na przykład dla dwuwymiarowej algebry Liego pól wektorowych z elementami bazowymi

$$Q_1 = \partial_{x_1}, \quad Q_2 = (1 - e^{x_1})\partial_{x_1} + e^{x_1}\partial_{x_2}$$

oraz komutatorem $[Q_1, Q_2] = Q_2 - Q_1$, istnieje zmienna kanoniczna

$$\gamma = x_1 + x_2.$$

Łatwo sprawdzić, że spełnia ona warunki $Q_i\gamma = 1$, $i = 1, 2$.

6. Podsumowanie

Metody teoriogrupowe stanowią ważne narzędzie badania równań różniczkowych. Przy ich użyciu można uzyskać m.in. następujące wyniki:

1. Niezmienniczość względem pewnych, skończenie wymiarowych algebr gwarantuje linearyzację równań różniczkowych cząstkowych drugiego rzędu o dwóch zmiennych niezależnych. Wyniki te można uogólnić na przypadek równań drugiego rzędu o trzech zmiennych niezależnych
2. Za pomocą niezmienników i niezmienników różniczkowych algebry równoważności można sformułować warunek konieczny równoważności równań różniczkowych oraz badać ich całkowalność
3. Generowanie nowych równań i ich rozwiązań ze znanych równań i rozwiązań, w szczególności rozwiązań dla równań opisujących niejednorodne środowiska z rozwiązań dla jednorodnego środowiska
4. Rozszerzenie klasy równań niezmienniczych względem danej grupy przez wprowadzenie przekształceń z dyskretnym parametrem

6. Podsumowanie

Metody teoriogrupowe stanowią ważne narzędzie badania równań różniczkowych. Przy ich użyciu można uzyskać m.in. następujące wyniki:

1. Niezmienniczość względem pewnych, skończenie wymiarowych algebr gwarantuje linearyzację równań różniczkowych cząstkowych drugiego rzędu o dwóch zmiennych niezależnych. Wyniki te można uogólnić na przypadek równań drugiego rzędu o trzech zmiennych niezależnych
2. Za pomocą niezmienników i niezmienników różniczkowych algebry równoważności można sformułować warunek konieczny równoważności równań różniczkowych oraz badać ich całkowalność
3. Generowanie nowych równań i ich rozwiązań ze znanych równań i rozwiązań, w szczególności rozwiązań dla równań opisujących niejednorodne środowiska z rozwiązań dla jednorodnego środowiska
4. Rozszerzenie klasy równań niezmienniczych względem danej grupy przez wprowadzenie przekształceń z dyskretnym parametrem

6. Podsumowanie

Metody teoriogrupowe stanowią ważne narzędzie badania równań różniczkowych. Przy ich użyciu można uzyskać m.in. następujące wyniki:

1. Niezmienniczość względem pewnych, skończenie wymiarowych algebr gwarantuje linearyzację równań różniczkowych cząstkowych drugiego rzędu o dwóch zmiennych niezależnych. Wyniki te można uogólnić na przypadek równań drugiego rzędu o trzech zmiennych niezależnych
2. Za pomocą niezmienników i niezmienników różniczkowych algebry równoważności można sformułować warunek konieczny równoważności równań różniczkowych oraz badać ich całkowalność
3. Generowanie nowych równań i ich rozwiązań ze znanych równań i rozwiązań, w szczególności rozwiązań dla równań opisujących niejednorodne środowiska z rozwiązań dla jednorodnego środowiska
4. Rozszerzenie klasy równań niezmienniczych względem danej grupy przez wprowadzenie przekształceń z dyskretnym parametrem

6. Podsumowanie

Metody teoriogrupowe stanowią ważne narzędzie badania równań różniczkowych. Przy ich użyciu można uzyskać m.in. następujące wyniki:

1. Niezmienniczość względem pewnych, skończenie wymiarowych algebr gwarantuje linearyzację równań różniczkowych cząstkowych drugiego rzędu o dwóch zmiennych niezależnych. Wyniki te można uogólnić na przypadek równań drugiego rzędu o trzech zmiennych niezależnych
2. Za pomocą niezmienników i niezmienników różniczkowych algebry równoważności można sformułować warunek konieczny równoważności równań różniczkowych oraz badać ich całkowalność
3. Generowanie nowych równań i ich rozwiązań ze znanych równań i rozwiązań, w szczególności rozwiązań dla równań opisujących niejednorodne środowiska z rozwiązań dla jednorodnego środowiska
4. Rozszerzenie klasy równań niezmienniczych względem danej grupy przez wprowadzenie przekształceń z dyskretnym parametrem

Wybrane pozycje bibliograficzne

- Lahno W.I., Spiczak S.W., Stognij W.I., *Simmetrijnyj analiz urawnienij ewolucjonnogo tipa*, Moskwa, Iżewsk, 2004
- Ovsiannikov L.V. 1982 *Group Analysis of Differential Equations*, (New York: Academic)
- Tresse A. 1894 *Sur les invariants différentiels des groupes continus de transformations, Acta Math.* v. 18, p. 1– 88.
- Mubarakzianov G.M. *Klasyfikacja rzeczywistych struktur pięciowymiarowych algebr Liego* Matematika, 1963, Nr 3 (34), s. 99–106, (ros.)
- Ferapontov E.V., Hadjikos L., *Integrable equations of the dispersionless Hirota type and hypersurfaces in the Lagrangian Grassmannian*, arXiv:0705.1774v1, 12 May 2007
- Ferapontov E.V., Khusnutdinova K.R. *On the integrability of (2+1)-dimensional quasilinear systems* , Comm. Math.Phys. 248 (2004), p. 187–206

Wybrane pozycje bibliograficzne, c.d.

Tsyfra I. *Non-local ansätze for nonlinear heat and wave equations.* J. Phys. A **30** (1997), no. 6, 2251–2262

Tsyfra, I.; Napoli, A.; Messina, A.; Tretynyk, V. *On new ways of group methods for reduction of evolution-type equations.* J. Math. Anal. Appl. **307** (2005), no. 2, 724–735

Tsyfra I.M., Czyżycki T. *Równoważność i całkowalność równań różniczkowych zwyczajnych drugiego rzędu*, Dokł. Nac. Akademii Nauk Białorusi, tom 55, Nr 1, str. 10–15, styczeń–luty 2011 (w języku rosyjskim)

Tsyfra I.M., Czyżycki T. *Group Transformations with Discrete Parameter and Invariant Schrödinger Equation*, Proceedings of the XXVIII Workshop on Geometric Methods in Physics, Białowieża, Poland, 28 June – 4 July 2009, Amer. Inst. of Physics, AIP Conference Proceedings 1191, str. 182–187

Czyżycki T. *The Tresse theorem and differential invariants for the nonlinear Schrödinger equation* J.Phys.A: Math. Theor, **40** (2007), p. 9331 – 9342

Wybrane pozycje bibliograficzne, c.d.

- Czyżycki T. *Equivalence groups of differential equations and their applications to mathematical physics problems*, Proceedings of the XXVII Workshop on Geometric Methods in Physics, Białowieża, Poland, 29 June – 5 July 2008, Amer. Inst. of Physics, AIP Conference Proceedings 1079, str. 135–141
- Czyżycki T., Hrivnák J. *Equivalence problem and integrability of the Riccati equations*, Nonlinear Differential Equations and Applications NoDEA, vol. 17, Issue 3, 2010, pp. 371–388, Birkhäuser Verlag Basel/Switzerland