Równania Naviera-Stokesa dla chemicznie reagujących płynów ściśliwych.

Ewelina Zatorska

Instytut Matematyki Stosowanej i Mechaniki
Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki
Uniwersytet Warszawski
E-mail: e.zatorska@mimuw.edu.pl

Warszawa, 13.10.2011

INNOVATIVE ECONOMY
NATIONAL COHESION STRATEGY

FNP Foundation for Polish Science

EUROPEAN REGIONAL DEVELOPMENT FUND

- Rozważmy najprostszą reakcję chemiczną
$$A + C \rightarrow B,$$
zachodzącą w ośrodku, który oznaczamy jako D.
- W przypadku reakcji spalania D oznaczałoby rozpuszczalnik, A-paliwo, C-utleniacz, natomiast B byłoby produktem spalania.
- Załóżmy, że utleniacza i rozpuszczalnika jes nieporównywalnie więcej niż paliwa i produktów, wtedy reakcja zachodzi według schematu
$$A \rightarrow B.$$
- W końcu, wyobraźmy sobie, że jest to reakcja odwracalna, mamy zatem
$$A \rightleftharpoons B.$$

Poniższe równania opisują prawa zachowania: masy, pędu, energii oraz bilans masowy dla składnika A:

$$\partial_t \varrho + \operatorname{div}(\varrho \mathbf{u}) = 0,$$

$$\partial_t(\varrho \mathbf{u}) + \operatorname{div}(\varrho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) - \operatorname{div}\left(2\mu \mathbf{D}(\mathbf{u}) + \nu \operatorname{div} \mathbf{u} \mathbf{I}\right) + \nabla p = 0,$$

$$\partial_t(\varrho E) + \operatorname{div}(\varrho E \mathbf{u}) + \operatorname{div}(p \mathbf{u}) + \operatorname{div} \mathbf{Q} - \operatorname{div}\left(\left(2\mu \mathbf{D}(\mathbf{u}) + \nu \operatorname{div} \mathbf{u} \mathbf{I}\right) \cdot \mathbf{u}\right) = 0,$$

$$\partial_t(\varrho Y_A) + \operatorname{div}(\varrho Y_A \mathbf{u}) + \operatorname{div}(\mathbf{F}_A) = \varrho \omega_A.$$

Przez E oznaczamy całkowitą energię, tzn. sumę energii wewnętrznej i kinetycznej układu

$$E(\varrho, \mathbf{u}, \vartheta, Y_A) = \frac{1}{2}|\mathbf{u}|^2 + e(\varrho, \vartheta, Y_A),$$

zaś $Y_A = \frac{\varrho_A}{\varrho}$ oznacza koncentrację składnika A,

$$Y_A + Y_B = 1.$$

- Ciśnienie $p(\varrho, \vartheta, Y_A) = p_E(\varrho) + p_M(\varrho, \vartheta, Y_A)$, dokładniej

$$p_E = \varrho^{\gamma}, \quad \gamma > 1, \quad p_M = \sum_{k \in \{A,B\}} p_k = R\varrho\vartheta \left(\sum_{k \in \{A,B\}} \frac{Y_k}{m_k} \right).$$

- Energia wewnętrzna $e(\varrho, \vartheta, Y_A) = e_E + e_M + \sum_{k \in \{A,B\}} Y_k e_k^{for}$, gdzie e_k^{for} oznacza energię formacji każdego ze składników (stała), ponadto

$$e_E = \frac{1}{\gamma - 1} \varrho^{\gamma - 1}, \quad e_M = \vartheta \sum_{k \in \{A,B\}} c_{vk} Y_k,$$

- Entropia $s(\varrho, \vartheta, Y_A)$, "zadana jest", z dokładnością do stałej poprzez formułę Gibbsa

$$\vartheta \mathbf{D} s = \mathbf{D} e + p \mathbf{D} \left(\frac{1}{\varrho} \right) - \sum_{k \in \{A,B\}} g_k \mathbf{D} Y_k,$$

z funkcjami Gibbsa $g_k = h_k - \vartheta s_k$, gdzie cząstkowe entalpie i entropie zależą od ϱ, ϑ, Y_A w następujący sposób

$$h_k = h_k^{for} + c_{pk}\vartheta, \quad s_k = s_k^{for} + c_{pk} \ln \vartheta - \frac{R}{m_k} \log \frac{p_k}{p^{for}},$$

ciepła właściwe $c_{pk} = c_{vk} + \frac{R}{m_k}$.

Przegląd wyników

- Istnienie rozwiązań przy danych początkowych blisko punktu równowagi:
  V. Giovangigli: Multicomponent Flow Modeling, Birkhäuser, Basel, 1999.
- Istnienie rozwiązań wariacyjnych w przypadku, gdy ciśnienie nie zależy od koncentracji składników a dyfuzja zadana jest prawem Ficka:

  $$\mathbf{F}_k = -\mathcal{D}_k \nabla Y_k, \quad k = 1, \ldots, n.$$

  E. Feireisl, H. Petzeltová, K. Trivisa: Multicomponent reactive flows: global-in-time existence for large data. Commun. Pure Appl. Anal. 7 (2008), no. 5, 1017–1047.
- Reakcje spalania:
  D. Donatelli, K. Trivisa: On the Motion of a Viscous Compressible Radiative-Reacting Gas, Commun. Math. Phys. 265, 463–491 (2006).
- Odwracalna reakcja izotermiczna:
  E. Zatorska: On a steady flow of multicomponent, compressible, chemically reacting gas. Nonlinearity 24 (2011) 3267-3278.
  E.Zatorska: On the flow of compressible, chemically reacting gas with viscosity vanishing on vacuum. Preprint no. 2011 - 016, http://mmns.mimuw.edu.pl/preprints/

Równanie entropii

Całkowita entropia układu spełnia równanie

$$\partial_t(\varrho s) + \operatorname{div}(\varrho s \mathbf{u}) + \operatorname{div}\left(\frac{\mathbf{Q}}{\vartheta} - \sum_{k\in\{A,B\}} \frac{g_k}{\vartheta}\mathbf{F}_k\right) = \sigma,$$

gdzie $\mathbf{Q}$ oznacza strumień ciepła (dyfuzja składników + prawo Fouriera)

$$\mathbf{Q} = \sum_{k\in\{A,B\}} h_k \mathbf{F}_k - \kappa\nabla\vartheta.$$

Zgodnie z II zasadą termodynamikii, produkcja entopii

$$\sigma = \frac{2\mu\mathbf{D}(\mathbf{u}) : \mathbf{D}(\mathbf{u}) + \nu|\operatorname{div}\mathbf{u}|^2}{\vartheta} - \frac{\varrho}{\vartheta}\sum_{k\in\{A,B\}} g_k\omega_k \\ - \frac{\mathbf{Q}\cdot\nabla\vartheta}{\vartheta^2} - \sum_{k\in\{A,B\}} \mathbf{F}_k\cdot\nabla\left(\frac{g_k}{\vartheta}\right),$$

jest nieujemna dla wszystkich możliwych procesów. W szczególności

$$-\sum_{k\in\{A,B\}} \frac{\mathbf{F}_k}{m_k}\cdot\nabla\left(\log p_k\right) \geq 0.$$

Ciśnienie zależne od koncentracji składników

Biorąc:

$$p_M(\varrho, \vartheta, Y_1, \dots Y_n) = R\varrho\vartheta\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{Y_k}{m_k}\right), \quad \mathbf{F}_k = -\mathcal{D}_k \nabla Y_k, \quad k = 1, \dots, n$$

mamy problem z określeniem znaku wyrażenia typu $\nabla\varrho \cdot \nabla Y_k$.
Ogólna postać dyfuzji k-tego składnika mieszaniny:

$$\mathbf{F}_k = -\sum_{l=1}^{n} C_{kl}\mathbf{d}_l, \quad \mathbf{d}_l = \nabla\left(\frac{p_l}{p_M}\right) + \left(\frac{p_l}{p_M} - \frac{\varrho_l}{\varrho}\right)\nabla \log p_M.$$

Zatem, w przypadku dwóch składników, A i B, możemy przyjąć

$$\mathbf{F}_A = -D\left(\nabla\left(\frac{p_A}{p_M}\right) + \left(\frac{p_A}{p_M} - Y_A\right)\nabla \log p_M\right)$$

$$\mathbf{F}_B = -\mathbf{F}_A,$$

wówczas

$$-\sum_{k\in\{A,B\}}\frac{\mathbf{F}_k}{m_k}\cdot\nabla\left(\log p_k\right) = \frac{Dp_M}{\vartheta\varrho}\frac{1}{Y_A Y_B}\left(\frac{\nabla p_A}{p_M} - \frac{\varrho_A}{\varrho}\nabla \log p_M\right)^2 \geq 0.$$

Podstawowy problem

Ruch mieszaniny dwóch gazów reagujących chemicznie w stałej temperaturze, może być opisany układem:

$$\left.\begin{aligned} \partial_t\varrho + \operatorname{div}(\varrho\mathbf{u}) = 0 \\ \partial_t(\varrho\mathbf{u}) + \operatorname{div}(\varrho\mathbf{u}\otimes\mathbf{u}) - \operatorname{div}(2\mu\mathbf{D}(\mathbf{u})) - \nabla(\nu\operatorname{div}\mathbf{u}) + \nabla p = 0 \\ \partial_t(\varrho Y_A) + \operatorname{div}(\varrho Y_A\mathbf{u}) + \operatorname{div}(\mathbf{F}_A) = \varrho\omega \end{aligned}\right\} \text{ w } \quad (0,T)\times\Omega.$$

Szybkość reakcji opisana jest przez $\omega = \omega(Y_A, Y_B)$

$$-\underline{\omega} \le \omega(Y_A, Y_B) \le \overline{\omega}, \qquad \text{dla} \quad 0 \le Y_A, Y_B \le 1.$$

Dodatkowo, zakładamy, że reakcja jest odwracalna, to też

$$\omega(Y_A, Y_B) \ge 0 \qquad \text{dla} \quad Y_A = 0.$$

Ale

$$\mathbf{F}_A \approx -\tilde{D}\left(\nabla p_A - Y_A\nabla p_M\right) \ne \nabla\phi,$$

$$\nabla p \approx \left(\frac{1}{m_A} - \frac{1}{m_B}\right)\nabla\left(\varrho Y_A\right) + \frac{\nabla\varrho}{m_B},$$

czyli potrzebna jest większa regularność ϱ!!!

Zarowanie się lepkości w próżni.

Niech $\mu = \mu(\varrho),\ \nu = \nu(\varrho)$ będą dwiema funkcjami klasy $C^2(0,\infty)$ spełniającymi

$$\nu(\varrho) = 2\varrho\mu'(\varrho) - 2\mu(\varrho),$$

[patrz Bresch-Desjardins].

Dodatkowo (choć niekoniecznie) niech $r \in (0,1)$ będzie stałą, dla której

$$\begin{gathered}\mu'(\varrho) \geq r, \quad \mu(0) \geq 0,\\ |\nu'(\varrho)| \leq \frac{1}{r}\mu'(\varrho),\\ r\mu(\varrho) \leq 2\mu(\varrho) + 3\nu(\varrho) \leq \frac{1}{r}\mu(\varrho).\end{gathered}$$

Wtedy, kosztem zwartości po przestrzeni prędkości możemy uzyskać informację o wyższej regularności gęstości.

Minimalna regularność rozwiązań:

$$
\begin{gathered}
\varrho \in L^\infty(0,T;L^1\cap L^\gamma(\Omega)),\\
\sqrt{\varrho} \in L^\infty(0,T;H^1(\Omega)),\\
\sqrt{\varrho}\mathbf{u} \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega)),\\
\mu(\varrho)\mathbf{D}(\mathbf{u}) \in L^2(0,T;\big(W^{1,\infty}(\Omega)\big)^*_{\mathrm{loc}}), \quad \nu(\varrho)\,\mathrm{div}\,\mathbf{u} \in L^2(0,T;\big(W^{1,\infty}(\Omega)\big)^*_{\mathrm{loc}}),\\
\varrho \geq 0, \quad 0 \leq Y_A \leq 1, \quad \text{p.w. w } (0,T)\times\Omega,\\
\nabla(\varrho Y_A) \in L^2(0,T;\big(W^{1,\infty}(\Omega)\big)^*_{\mathrm{loc}}).
\end{gathered}
$$

Trójkę funkcji $(\varrho, \mathbf{u}, Y)$ nazwiemy słabym rozwiązaniem jeżeli:

- Równanie ciągłości spełnione jest w sensie dystrybucyjnym

$$
\begin{cases}
\partial_t\varrho + \mathrm{div}(\sqrt{\varrho}\sqrt{\varrho}\mathbf{u}) = 0,\\
\varrho(0,x) = \varrho^0(x).
\end{cases}
$$

- Słaba postać równania pędu spełniona jest dla każdej funkcji $\phi(t,x)$ gładkiej o zwartym nośniku takiej, że $\phi(T,\cdot)=0$

$$\int_\Omega \mathbf{m}^0\cdot\phi(0,x)\,\mathrm{d}x+\int_0^T\!\!\int_\Omega \left(\sqrt{\varrho}(\sqrt{\varrho}\mathbf{u})\cdot\partial_t\phi+\sqrt{\varrho}\mathbf{u}\otimes\sqrt{\varrho}\mathbf{u}:\nabla\phi\right)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$$
$$+\int_0^T\!\!\int_\Omega p(\varrho,Y)\,\mathrm{div}\,\phi\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t-\int_0^T\langle 2\mu(\varrho)\mathbf{D}(\mathbf{u}),\nabla\phi\rangle\,\mathrm{d}t-\int_0^T\langle\nu(\varrho)\,\mathrm{div}\,\mathbf{u},\mathrm{div}\,\phi\rangle\,\mathrm{d}t=0.$$

Dwa ostatnie wyrazy powinny być rozumiane w ''bardzo słabym sensie'', to znaczy:

$$\langle 2\mu(\varrho)\mathbf{D}(\mathbf{u}),\nabla\phi\rangle=-\int_\Omega\frac{\mu(\varrho)}{\sqrt{\varrho}}\sqrt{\varrho}\mathbf{u}_j\partial_{ii}\phi_j\,\mathrm{d}x-2\int_\Omega\mu'(\varrho)\sqrt{\varrho}\mathbf{u}_j\partial_i\sqrt{\varrho}\partial_i\phi_j\,\mathrm{d}x$$
$$-\int_\Omega\frac{\mu(\varrho)}{\sqrt{\varrho}}\sqrt{\varrho}\mathbf{u}_i\partial_{ji}\phi_j\,\mathrm{d}x-2\int_\Omega\mu'(\varrho)\sqrt{\varrho}\mathbf{u}_i\partial_j\sqrt{\varrho}\partial_i\phi_j\,\mathrm{d}x,$$

oraz

$$\langle\nu(\varrho)\,\mathrm{div}\,\mathbf{u},\mathrm{div}\,\phi\rangle=-\int_\Omega\frac{\nu(\varrho)}{\sqrt{\varrho}}\sqrt{\varrho}\mathbf{u}_i\partial_{ij}\phi_j\,\mathrm{d}x-2\int_\Omega\nu'(\varrho)\sqrt{\varrho}\mathbf{u}_i\partial_i\sqrt{\varrho}\partial_j\phi_j\,\mathrm{d}x.$$

- Słabe sformułowanie bilansu masowego składnika A spełnione jest dla każdej funkcji gładkiej $\psi(t,x)$ o zwartym nośniku takiej, że $\psi(T,\cdot)=0$

$$\int_\Omega \varrho_A^0 \cdot \psi(0,x)\,\mathrm{d}x + \int_0^T\!\!\int_\Omega \left(\sqrt{\varrho}Y_A\sqrt{\varrho}\mathbf{u}\cdot\partial_t\psi + \sqrt{\varrho}Y_A\sqrt{\varrho}\mathbf{u}\cdot\nabla\psi\right)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$$
$$+\int_0^T \langle \mathbf{F}_A, \nabla\psi\rangle\,\mathrm{d}t = \int_0^T\!\!\int_\Omega \varrho\omega\psi\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t.$$

Gdzie, podobnie jak poprzednio, ostatni człon ma sens jeżeli rozumiemy go jako:

$$\langle \mathbf{F}_A, \nabla\psi\rangle = \frac{1}{m_A}\int_\Omega \varrho Y_A\Delta\psi\,\mathrm{d}x + \frac{2}{m_A}\int \sqrt{\varrho}Y_A\nabla\sqrt{\varrho}\cdot\nabla\psi$$
$$+\left(\frac{1}{m_A}-\frac{1}{m_B}\right)\int_\Omega \sqrt{\varrho}Y_A^2\nabla\sqrt{\varrho}\cdot\nabla\psi\,\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{m_A}-\frac{1}{m_B}\right)\int_\Omega \varrho Y_A^2\Delta\psi\,\mathrm{d}x.$$

Słaba ciągowa stabilność

Niech $(\varrho_n, \mathbf{u}_n, Y_{A,n})_{n\in\mathbb{N}}$ oznacza ciąg rozwiązań spełniających oszacowania energetyczno-entropijne. Przy odpowiednich założeniach na regularność danych początkowych możemy wybrać taki podciąg $(\varrho_n, \sqrt{\varrho_n}\mathbf{u}_n, Y_{A,n})$, który zbiega do słabego rozwiązania w następujący sposób:

$$\begin{gathered}
\varrho_n \to \varrho \quad \text{silnie w } C^0(0,T; L^{\frac{3}{2}}_{loc}(\Omega)),\\
\sqrt{\varrho_n}\mathbf{u}_n \to \sqrt{\varrho}\mathbf{u} \quad \text{silnie w } L^2(0,T; L^2_{loc}(\Omega)),\\
\mathbf{m}_n = \varrho_n\mathbf{u}_n \to \varrho\mathbf{u} \quad \text{silnie w } L^2(0,T; L^1_{loc}(\Omega)),\\
\mu(\varrho_n)\mathbf{D}(\mathbf{u}_n) \to \mu(\varrho)\mathbf{D}(\mathbf{u}) \quad \text{w } \mathcal{D}'((0,T)\times\Omega),\\
\nu(\varrho_n)\,\mathrm{div}(\mathbf{u}_n) \to \nu(\varrho)\,\mathrm{div}(\mathbf{u}) \quad \text{w } \mathcal{D}'((0,T)\times\Omega),\\
Y_{A,n} \to Y_A \quad \text{silnie w } L^p(0,T; L^p_{loc}(\Omega)),
\end{gathered}$$

dla każdego p skończonego oraz $T>0$.

Dla każdego gładkiego rozwiązania mamy:

1. Słabą zsadę maksimum:

$$Y_A, Y_B \geq 0 \quad \text{na } \Omega \times (0, T),$$

dodatkowo

$$Y_A + Y_B = 1.$$

2. Oszacowanie energetyczne:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} \int_\Omega \left(\frac{1}{2} \varrho |\mathbf{u}|^2 + \frac{1}{\gamma - 1} \varrho^\gamma - \frac{1}{m_B} \varrho \log \varrho \right) \, \mathrm{d}x + \int_\Omega 2\mu(\varrho) |\mathbf{D}(\mathbf{u})|^2 \, \mathrm{d}x$$
$$+ \int_\Omega \nu(\varrho) (\operatorname{div} \mathbf{u})^2 \, \mathrm{d}x - \int_\Omega \varrho Y_A \left(\frac{1}{m_A} - \frac{1}{m_B} \right) \operatorname{div} \mathbf{u} \, \mathrm{d}x = 0.$$

3. Oszacowanie entropijne:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\int_\Omega\left(\frac{1}{2}\varrho|\mathbf{u}+\nabla\phi(\varrho)|^2+\frac{1}{\gamma-1}\varrho^\gamma-\frac{1}{m_B}\varrho\log\varrho\right)\,\mathrm{d}x$$
$$+\int_\Omega\nabla\phi(\varrho)\cdot\nabla p(\varrho,Y)\,\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_\Omega\mu(\varrho)|\nabla\mathbf{u}-\nabla^T\mathbf{u}|^2\,\mathrm{d}x$$
$$-\int_\Omega\varrho Y_A\left(\frac{1}{m_A}-\frac{1}{m_B}\right)\mathrm{div}\,\mathbf{u}\,\mathrm{d}x=0,$$

[dla ϕ w postaci $\nabla\phi(\varrho)=\frac{\mu'(\varrho)\nabla\varrho}{\varrho}$].

4. Oszacowanie gradientu koncentracji składnika A:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\int_\Omega\frac{1}{2}\varrho Y_A^2\,\mathrm{d}x+\frac{9m_A-m_B}{8m_Am_B}\int_\Omega\varrho|\nabla Y_A|^2\,\mathrm{d}x$$
$$\leq\int_\Omega\varrho|\omega(Y)|\,\mathrm{d}x+\frac{1}{8}\left(\frac{1}{m_A}-\frac{1}{m_B}\right)\int_\Omega\frac{|\nabla\varrho|^2}{\varrho}\,\mathrm{d}x.$$

5. Dodatkowe oszacowanie na pole prędkości:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\int_\Omega \frac{1}{2}\varrho(1+|\mathbf{u}|^2)\ln(1+|\mathbf{u}|^2)\ \mathrm{d}x + \frac{r}{2}\int_\Omega \mu(\varrho)(1+\ln(1+|\mathbf{u}|^2))|\mathbf{D}(\mathbf{u})|^2\ \mathrm{d}x$$
$$\leq C\left(\int_\Omega \left(\frac{p(\varrho,Y)^2\varrho^{-\frac{\delta}{2}}}{\mu(\varrho)}\right)^{\frac{2}{2-\delta}}\ \mathrm{d}x\right)^{\frac{2-\delta}{2}}\left(\int_\Omega \varrho(2+\ln(1+|\mathbf{u}|^2))^{\frac{2}{\delta}}\ \mathrm{d}x\right)^{\frac{\delta}{2}}$$
$$+ C\int_\Omega \mu(\varrho)|\nabla\mathbf{u}|^2\ \mathrm{d}x$$

[mnożymy równanie pędu przez $(1+\ln(1+|\mathbf{u}|^2))\mathbf{u}$].

Ostatecznie, dysponujemy następującym zbiorem oszacowań

$$\|\varrho_n\|_{L^\infty(0,T;L^1(\Omega))} \leq C, \qquad \|\varrho_n\|_{L^\infty(0,T;L^\gamma(\Omega))} \leq C,$$
$$\|\varrho_n\mathbf{u}_n^2\|_{L^\infty(0,T;L\log L(\Omega))} \leq C, \qquad \|Y_n\|_{L^\infty((0,T)\times\Omega)} \leq C,$$
$$\|\nabla\sqrt{\varrho_n}\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \leq C, \qquad \|\sqrt{\varrho_n}\nabla\mathbf{u}_n\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \leq C,$$
$$\|\sqrt{\varrho_n}\nabla Y_n\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \leq C, \qquad \|\nabla\varrho_n^{\frac{\gamma}{2}}\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \leq C.$$

Konstrukcja rozwiązań przybliżonych

Ogólnie jest to nadal problem otwarty.

Pomysły:

- dodatkowa siła tarcia
$$\sim \varrho|\mathbf{u}|\mathbf{u},$$
- modyfikacja ciśnienia w obszarach małej gęstości:
$$\tilde{p}_E(\varrho) \sim -\varrho^{-3}.$$

Ten ostatni wydaje się lepszy, gdyż ostatecznie chcielibyśmy badać płyny przewodzące ciepło.

Przy założeniu, $\mu(\varrho) = \varrho$, $\nu(\varrho) = 0$ układ przybliżony przybiera postać:

$$\partial_t \varrho + \operatorname{div}(\varrho \mathbf{u}) - \varepsilon \Delta \varrho = 0,$$

$$\partial_t(\varrho \mathbf{u}) + \operatorname{div}(\varrho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) - 2 \operatorname{div}(\varrho \mathbf{D}(\mathbf{u}))$$

$$+\nabla \tilde{p}(\varrho, Y_A) - \delta \varrho \nabla \left(\Delta^{2s+1} \varrho\right) + \eta \Delta^2 \mathbf{u} + \varepsilon (\nabla \varrho \cdot \nabla) \mathbf{u} = 0,$$

$$\partial_t \varrho_A - \varepsilon \Delta \varrho_A + \operatorname{div}(\varrho_A \mathbf{u}) - D \operatorname{div}\left(\left(\frac{\varrho_B^+}{\varrho m_A} + \frac{\varrho_A^+}{\varrho m_B}\right)_{\varepsilon_1} \nabla \varrho_A - \left(\frac{\varrho_A^+}{\varrho m_B}\right)_{\varepsilon_1} \nabla \varrho\right)$$

$$= \varrho \left(\omega\left(\frac{\varrho_A}{\varrho}\right)\right)_{\varepsilon_2},$$

$$\partial_t \varrho_B - \varepsilon \Delta \varrho_B + \operatorname{div}(\varrho_B \mathbf{u}) - D \operatorname{div}\left(\left(\frac{\varrho_A^+}{\varrho m_B} + \frac{\varrho_B^+}{\varrho m_A}\right)_{\varepsilon_1} \nabla \varrho_B - \left(\frac{\varrho_B^+}{\varrho m_A}\right)_{\varepsilon_1} \nabla \varrho\right)$$

$$= -\varrho \left(\omega\left(\frac{\varrho_A}{\varrho}\right)\right)_{\varepsilon_2}.$$

Istnienie rozwiązań dla takiego układu jest konsekwencją klasycznej teorii dla równań parabolicznych (**O.A. Ladyzenskaja, V.A. Solonnikov, N.N. Uralceva).**

* Pierwsze oszacowanie energetyczne:

$$\partial_t \int_\Omega \left(\frac{1}{2} \varrho |\mathbf{u}|^2 + \frac{\delta}{2} |\nabla^{2s+1} \varrho|^2 + \varrho \pi(\varrho) \right) \, \mathrm{d}x + \int_\Omega 2\varrho |\mathbf{D}(\mathbf{u})|^2 \, \mathrm{d}x$$
$$+ \eta \int_\Omega |\Delta \mathbf{u}|^2 \, \mathrm{d}x + \delta\varepsilon \int_\Omega |\Delta^{s+1} \varrho|^2 \, \mathrm{d}x \leq \int_\Omega \left(\frac{\varrho_A^+}{m_A} + \frac{\varrho - \varrho_A^+}{m_B} \right) \operatorname{div} \mathbf{u} \, \mathrm{d}x,$$

gdzie $\pi'(s) = \tilde{p}_E(s)/s^2$. Stąd dostajemy następujące oszacowania, niezależne od $n, \varepsilon, \eta, \delta$ oraz T

$$\begin{array}{ll} \sqrt{\varrho}\mathbf{u} \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega)), & \sqrt{\varrho}\nabla \mathbf{u} \in L^2(0,T;L^2(\Omega)), \\ \sqrt{\eta}\Delta \mathbf{u} \in L^2(0,T;L^2(\Omega)), & \sqrt{\varepsilon\delta}\Delta^{s+1}\varrho \in L^2(0,T;L^2(\Omega)), \\ \sqrt{\delta}\nabla^{2s+1}\varrho \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega)), & \tilde{p}_E(\varrho) \in L^\infty(0,T;L^1(\Omega)). \end{array}$$

∗ Dodatkowo, z nierówności Soboleva

$$\|\varrho^{-1}\|_{L^\infty(\Omega)} \leq (1 + \|\varrho\|_{H^{2s+1}(\Omega)})^2 (1 + \|\varrho^{-1}\|_{L^3(\Omega)})^3$$

dla $s > 5/4$. Czyli dla zmodyfikowanego ciśnienia

$$\tilde{p}_E(\varrho) = \begin{cases} -\varrho^{-3} & \text{for } \varrho \leq 1, \\ \varrho^\gamma & \text{for } \varrho > 1, \end{cases}$$

możemy wykazać istnienie stałej zależnej jedynie od δ takiej, że

$$\|\varrho\|_{L^\infty((0,T)\times\Omega)} \geq \delta > 0.$$

∗ Oszacowania na odpowiednie normy masy składnika A dostaje się identycznie jak w poprzednim przypadku:

$$\varrho_A(x,t) = \varrho_A^+(x,t) \in L^\infty((0,T)\times\Omega), \quad \nabla\varrho_A \in L^2((0,T)\times\Omega).$$

* Z pierwszego oszacowania energetycznego wynika,że po przejściu z n do granicy nadal możemy testować równanie momentu funkcją $\nabla\phi = 2\frac{\nabla\varrho}{\varrho} \in L^2(H^{2s+1})$ oraz równanie ciągłości przez $\frac{|\nabla\phi(\varrho)|^2}{2}$, zatem

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\int_\Omega \left(\frac{1}{2}\varrho|\mathbf{u}+\nabla\phi(\varrho)|^2 + \frac{\delta}{2}|\nabla^{2s+1}\varrho|^2 + \varrho\pi(\varrho)\right)\,\mathrm{d}x + \int_\Omega \nabla\phi(\varrho)\cdot\nabla\tilde{p}(\varrho,\varrho_A)\,\mathrm{d}x$$
$$+2\delta\int_\Omega |\Delta^{s+1}\varrho|^2\,\mathrm{d}x + \delta\varepsilon\int_\Omega |\Delta^{s+1}\varrho|^2\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_\Omega \varrho|\nabla\mathbf{u}-\nabla^T\mathbf{u}|^2\,\mathrm{d}x + \eta\int_\Omega |\Delta\mathbf{u}|^2\,\mathrm{d}x$$
$$=\varepsilon\int_\Omega \nabla\varrho\cdot\nabla\mathbf{u}\cdot\nabla\phi\,\mathrm{d}x + \varepsilon\int_\Omega \Delta\varrho\frac{|\nabla\phi|^2}{2}\,\mathrm{d}x - \varepsilon\int_\Omega \mathrm{div}(\varrho\mathbf{u})\phi'(\varrho)\Delta\varrho\,\mathrm{d}x - \eta\int_\Omega \Delta\mathbf{u}\cdot\nabla\Delta\phi(\varrho)\,\mathrm{d}x.$$

* Dzięki temu możemy poprawić dotychczasowe oszacowania:

$$\nabla\sqrt{\varrho} \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \quad \sqrt{\delta}\Delta^{s+1}\varrho \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$$

oraz

$$\nabla\xi(\varrho)^{-3/2} \in L^2((0,T)\times\Omega), \quad \nabla\varrho^{\gamma/2} \in L^2((0,T)\times\Omega_2),$$

gdzie ξ jest gładką funkcją taką,że $\xi(y) = y$ dla $y \leq 1/2$ oraz $\xi(y) = 0$ dla $y > 1$.

Zwartość ciągu $\mathbf{u}_\delta$

Dzięki oszacowaniom gradientu zmodyfikowanego cisśnienia mamy:

$$\|\nabla \mathbf{u}\|_{L^p(0,T;L^q(\Omega))} \leq C(\Omega)\left(1 + \|\nabla\xi(\varrho)^{-3/2}\|_{L^2((0,T)\times\Omega)}\right)\|\sqrt{\varrho}\nabla\mathbf{u}\|_{L^2((0,T)\times\Omega)},$$

gdzie

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\cdot 3/2\cdot 2}, \quad \frac{1}{q} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6\cdot 3/2\cdot 2},$$

zatem z nierówności Soboleva

$$\mathbf{u} \in L^{3/2}(0, T; L^{9/2}(\Omega)).$$

Dlatego, dla $0 \leq \epsilon \leq 1/2$ możemy oszacować

$$\|\sqrt{\varrho}\mathbf{u}\|_{L^{p'}(0,T;L^{q'}(\Omega))} \leq \|\varrho\|^{1/2-\epsilon}_{L^\infty(0,T;L^\gamma(\Omega))}\|\sqrt{\varrho}\mathbf{u}\|^{2\epsilon}_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}\|\mathbf{u}\|^{1-2\epsilon}_{L^{3/2}(0,T;L^{9/2}(\Omega))},$$

dla p', q' spełniających:

$$\frac{1}{p'} = \frac{1-2\epsilon}{3/2}, \quad \frac{1}{q'} = \frac{1/2-\epsilon}{\gamma} + \frac{2\epsilon}{2} + \frac{1-2\epsilon}{9/2}.$$

Biorąc $\epsilon > 1/8$ otrzymujemy $p', q' > 2$.