

PESEL:

UNIwersytet Warszawski
Wydział Matematyki, Informatyki
i Mechaniki

Egzamin wstępny na studia 2 stopnia
na kierunku INFORMATYKA

21 września 2022 roku

Czas rozwiązywania: 150 minut

W każdym spośród 30 zadań podane są trzy warianty: (a), (b) oraz (c). W kratce przy każdym z wariantów należy odpowiedzieć, czy jest on prawdziwy, wpisując drukowanymi literami TAK albo NIE. W przypadku omyłkowego wpisu kratkę należy przekreślić i napisać jedno z tych słów po jej lewej stronie.

Przykład poprawnego rozwiązania zadania

4. Każda liczba całkowita postaci $10^n - 1$, gdzie n jest całkowite i dodatnie,

TAK (a) dzieli się przez 9;

NIE (b) jest pierwsza;

TAK (c) jest nieparzysta.

Na stronach testu można pisać wyłącznie we wskazanych wyżej miejscach i jedynie słowa TAK oraz NIE. Pisać należy długopisem lub piórem.

Zasady punktacji

Kandydat zdobywa punkty „duże” (od 0 do 30) i punkty „małe” (od 0 do 90):

- jeden punkt „duży” kandydat uzyskuje za zadanie, w którym poprawnie wskazał prawdziwość albo fałsz każdego z trzech związanych z tym zadaniem wariantów odpowiedzi;*
- jeden punkt „mały” kandydat uzyskuje za każde poprawne wskazanie prawdziwości albo fałszu pojedynczego wariantu odpowiedzi. Oznacza to, że 3 „małe” punkty uzyskane w jednym zadaniu składają się na jeden „duży” punkt.*

Ostatecznym wynikiem egzaminu jest liczba

$$W = \min(30, D + m/100),$$

gdzie D oznacza liczbę „dużych”, a m liczbę „małych” punktów. Na przykład 5,50 oznacza, że kandydat poprawnie wskazał w całym teście prawdziwość albo fałsz łącznie 50 wariantów odpowiedzi, w tym każdego z trzech wariantów dla pewnych pięciu zadań.

Zasadniczą rolę w ostatecznym wyniku testu mają punkty „duże”. Punkty „małe” zwiększają rozdzielczość, jeśli wielu kandydatów dostało tyle samo „dużych” punktów.

Powodzenia!

1. Ciąg (a_n) liczb rzeczywistych dodatnich ma granicę $g \in \mathbb{R}$. Wynika z tego, że
- (a) $g > 0$;
 - (b) (a_n) jest monotoniczny;
 - (c) (a_n) jest ograniczony.
2. Funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest trzykrotnie różniczkowalna oraz $f(0) = 0$, $f'(0) = 0$, $f''(0) = 0$, $f'''(0) = -1$. Wynika z tego, że
- (a) f ma w 0 punkt przegięcia;
 - (b) f jest malejąca na pewnym otoczeniu 0;
 - (c) $f < 0$ na przedziale $(0, 10^{-10})$.
3. Miara Lebesgue'a zbioru $\{(x, y, z) : 0 \leq z \leq 1 - x^2 - y^2\} \subset \mathbb{R}^3$ jest
- (a) liczbą wymierną;
 - (b) liczbą mniejszą od $\frac{3}{2}$;
 - (c) liczbą większą od 1.
4. Dane są macierze $A \in \mathbb{C}^{6,6}$, $B \in \mathbb{C}^{7,6}$, $C \in \mathbb{C}^{7,8}$, gdzie $\mathbb{C}^{n,m}$ oznacza zbiór macierzy o elementach zespolonych o n wierszach i m kolumnach. Wówczas
- (a) jest określony iloczyn ABC ;
 - (b) jest określony iloczyn $AB^T C$;
 - (c) jest określony iloczyn $C^T B A^T$.
5. Wśród wierszy macierzy $A \in \mathbb{R}^{22,22}$ znajdują się pewne trzy wiersze tworzące układ liniowo niezależny w \mathbb{R}^{22} . Wynika z tego, że
- (a) wymiar obrazu macierzy A jest nie mniejszy niż 3;
 - (b) wymiar jądra macierzy A jest nie mniejszy niż 3;
 - (c) istnieje układ złożony z co najmniej 19 kolumn macierzy A , liniowo niezależny w \mathbb{R}^{22} .
6. Dziedzina funkcji F jest zbiór wszystkich porządków częściowych w zbiorze \mathbb{N} , wartość funkcji $F(r)$ to zbiór wszystkich łańcuchów w zbiorze uporządkowanym $\langle \mathbb{N}, r \rangle$. Wynika z tego, że
- (a) funkcja F jest różnowartościowa;
 - (b) zbiór wartości funkcji F jest zawarty w $P(P(\mathbb{N}))$;
 - (c) zbiór $P(P(\mathbb{N}))$ jest zawarty w zbiorze wartości funkcji F .
7. Istnieje w \mathbb{R} relacja równoważności mająca
- (a) przeliczalnie wiele nieprzeliczalnych klas abstrakcji;
 - (b) nieprzeliczalnie wiele przeliczalnych klas abstrakcji;
 - (c) nieprzeliczalnie wiele nieprzeliczalnych klas abstrakcji.

8. Układ kongruencji $\{x \equiv 2 \pmod{3}, x \equiv 3 \pmod{5}, x \equiv 5 \pmod{7}\}$
- (a) ma dokładnie jedno rozwiązanie w zbiorze $\{0, \dots, 100\}$;
- (b) ma dokładnie jedno rozwiązanie w zbiorze $\{0, \dots, 105\}$;
- (c) jest równoważny układowi $\{x \equiv 5 \pmod{21}, x \equiv -2 \pmod{35}\}$.
9. Niech G będzie grafem, którego wierzchołki odpowiadają wzajemnie jednoznacznie 2-elementowym podzbiorem zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, a dwa wierzchołki są połączone krawędzią, jeśli odpowiadające im podzbiory są rozłączne. Wynika z tego, że graf G jest
- (a) dwudzielny;
- (b) planarny;
- (c) hamiltonowski.
10. Jeśli oboje rodzice są dotknięci chorobą, ich dziecko z prawdopodobieństwem $p = 0,25$ odziedziczy ją. Para chorych ma czwórkę dzieci. Zakładamy, że zdarzenie polegające na dziedziczeniu choroby przez dziecko jest niezależne dla każdego dziecka. Wynika z tego, że
- (a) wartość oczekiwana liczby dzieci, które odziedziczyły chorobę, wynosi 1;
- (b) wariancja liczby dzieci, które odziedziczyły chorobę, wynosi 0,75;
- (c) prawdopodobieństwo, że żadne z dzieci nie odziedziczy choroby, wynosi $(0,75)^4$.
11. Zmienna losowa X ma następujące własności: $P(|X| \leq 1) = 1$, $0 < P(X > 0) < 1$. Wynika z tego, że
- (a) wartość oczekiwana EX zmiennej losowej X spełnia nierówność $EX \geq 0$;
- (b) wariancja $\text{Var}(X)$ zmiennej losowej X spełnia nierówność $\text{Var}(X) > 0$;
- (c) wariancja $\text{Var}(X)$ zmiennej losowej X spełnia nierówność $\text{Var}(X) < 100$.
12. W strukturze relacyjnej, której nośnikiem jest zbiór liczb całkowitych, a wszystkie symbole operacji i relacji mają standardowe znaczenie, następująca formuła logiki Hoare'a
- $$\{x = a - 1\} \text{ while } x > 0 \text{ do } x := (x - a) + 1 \{x = 0\}$$
- jest prawdziwa
- (a) dla każdego a ;
- (b) dla każdego dodatniego nieparzystego a ;
- (c) dla każdego dodatniego parzystego a .
13. Kratą $L_{m,n}$ nazywamy graf nieskierowany $G = (V, E)$, w którym zbiór wierzchołków $V = \{1, \dots, m\} \times \{1, \dots, n\}$, natomiast para wierzchołków $\{(i_1, j_1), (i_2, j_2)\}$ należy do E wtedy i tylko wtedy, gdy $|i_1 - i_2| = 1, j_1 = j_2$ lub $|j_1 - j_2| = 1, i_1 = i_2$. Algorytm Dijkstry używający kopca binarnego uruchamiamy na kracie $L_{10,n}$. Można tak wybrać wagi na krawędziach, aby ten algorytm znajdował najkrótsze ścieżki z wierzchołka $(1, 1)$ w czasie
- (a) $o(n)$;
- (b) $\Theta(n \log n)$;
- (c) $\Theta(n^2)$.

14. Zpełnym drzewem binarnym nazywamy drzewo, w którym wszystkie poziomy poza ostatnim są całkowicie wypełnione, a poziom ostatni jest wypełniony od strony lewej do prawej. Kopcem zupełnym typu MIN nazywamy zupełne drzewo binarne, w którym klucze są rozmieszczone w taki sposób, że klucz w każdym węźle jest nie większy od każdego klucza w jego poddrzewie.

- (a) Łączny koszt wykonania n operacji wstawienia elementu do początkowo pustego kopca zupełnego typu MIN wynosi $O(n)$.
- (b) Danych jest n kluczy, które pochodzą z uniwersum z liniowym porządkiem. Kopiec zupełny typu MIN dla tych kluczy można zbudować w czasie $O(n)$.
- (c) Mając zbudowany kopiec zupełny typu MIN dla n kluczy, klucze te można zawsze posortować w czasie $o(n \log n)$.

15. Dane są macierz A o wymiarach $n \times n$ postaci

$$A = \begin{pmatrix} -6 & 2 & & & & \\ 1 & -6 & 2 & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & 1 & -6 & 2 \\ & & & & 1 & -6 \end{pmatrix}$$

(w pustych miejscach A znajdują się zera) oraz pewien wektor $b \in \mathbb{R}^n$. Wówczas

- (a) układ równań $Ax = b$ daje się rozwiązać kosztem $O(n)$ operacji arytmetycznych;
- (b) układ równań $Ax = b$ daje się rozwiązać kosztem $O(n^3)$ operacji arytmetycznych;
- (c) rozkład Cholesky'ego macierzy A nie istnieje.

16. Rozważamy języki nad alfabetem $\{a, b\}^*$. Niech L_1 będzie generowany przez gramatykę

$$S \rightarrow \varepsilon | SS | aSb.$$

Niech L_2 będzie generowany przez gramatykę

$$\begin{aligned} S &\rightarrow aA | bB | \varepsilon, \\ A &\rightarrow aA | abA | S, \\ B &\rightarrow bB | abB | S. \end{aligned}$$

Niech L_3 będzie dopełnieniem L_2 . Wynika z tego, że język

- (a) $L_1 \cup L_2$ jest bezkontekstowy;
- (b) $L_1 \cap L_2$ jest bezkontekstowy;
- (c) $L_1 \cap L_3$ jest bezkontekstowy.

17. Prawdą jest, że

- (a) dla każdego automatu skończonego istnieje deterministyczny automat skończony, który akceptuje ten sam język;
- (b) dla każdego automatu ze stosem istnieje deterministyczny automat ze stosem, który akceptuje ten sam język;
- (c) dla każdej maszyny Turinga istnieje deterministyczna maszyna Turinga, która akceptuje ten sam język.

18. Dany jest program w Javie:

```
1 public class A {
2     private int i;
3
4     public int i() {
5         return i;
6     }
7
8     // public static void test() {
9     //     A a;
10    //     System.out.println(a.i());
11    // }
12
13    // public static void test() {
14    //     A a = new A();
15    //     System.out.println(a.i());
16    // }
17
18    // public static void test() {
19    //     A a = new A(1);
20    //     System.out.println(a.i());
21    // }
22
23    public static void main(String[] args) {
24        test();
25    }
26 }
```

Po odkomentowaniu

- (a) wierszy 8–11 program kompiluje się, a po uruchomieniu wypisze 0;
- (b) wierszy 13–16 program kompiluje się, a po uruchomieniu wypisze 0;
- (c) wierszy 18–21 program kompiluje się, a po uruchomieniu wypisze 0.

19. Dane są definicje klas w Javie:

```
1 class A {
2     int f() {return 1;}
3     int g() {return f();}
4 }
5 class B extends A {
6     int f() {return super.f() + 1;}
7     int g() {return f() + super.g();}
8 }
9 class C extends B {
10    int f() {return super.f() + 1;}
11 }
```

- (a) Wartością wyrażenia `new A().g()` jest 1.
- (b) Wartością wyrażenia `new B().g()` jest 3.
- (c) Wartością wyrażenia `new C().g()` jest 3.

20. W procesie kapsułkowania danych

- (a) datagramy warstwy sieciowej znajdują się w segmentach warstwy transportowej;
- (b) ramki warstwy łącza są umieszczane w datagramach UDP;
- (c) pakiety ICMP są umieszczane w datagramach warstwy sieciowej.

21. Przy wymianie wiadomości Alicja i Bartek korzystają z metod kryptografii klucza publicznego. Alicja przesłała Bartkowi zaszyfrowaną i podpisaną cyfrowo wiadomość. Wynika z tego, że

- (a) do zaszyfrowania wiadomości został wykorzystany klucz prywatny Alicji;
- (b) do odszyfrowania wiadomości zostanie wykorzystany klucz prywatny Bartka;
- (c) do weryfikacji podpisu cyfrowego zostanie wykorzystany klucz publiczny Alicji.

22. Szyfr Cezara

- (a) został złamany;
- (b) jest szyfrem podstawieniowym;
- (c) poddaje się kryptoanalizie statystycznej.

23. Załóżmy, że masz do wyboru zastosowanie IPsec lub SSL/TLS po TCP. IPsec lepiej się sprawdzi do wytworzenia tunelu zapewniającego poufność

- (a) przesyłania e-maili;
- (b) wideokonferencji multimedialnych;
- (c) rozmów telefonicznych.

24. Przypuśćmy, że w tabelach R i S kolumna A jest kluczem głównym i nie ma innych kolumn. Następujące zapytanie zwraca dokładnie te wiersze tabeli R, które nie znajdują się w tabeli S:

- (a) `SELECT R.A FROM R JOIN S ON R.A != S.A`
- (b) `SELECT R.A FROM R LEFT JOIN S ON R.A = S.A WHERE S.A IS NULL`
- (c) `SELECT * FROM R WHERE NOT EXISTS (SELECT * FROM S WHERE R.A = S.A)`

25. Załóżmy, że tabele R i S mają po n kolumn każda i operacje $R \cup S$, $R \setminus S$ oraz $R \times S$ są dobrze określone. Wówczas

- (a) $R \cup S$ ma n kolumn;
- (b) $R \setminus S$ ma n kolumn;
- (c) $R \times S$ ma n^2 kolumn.

26. Rozważmy następujący fragment opisu zwykłej, poprawnej strony HTML:

`!`

Pasuje do niego selektor

- (a) `#napis.czerwony`
- (b) `body span`
- (c) `span.czerwony`

27. W problemie jedzących filozofów N filozofów, gdzie $N \geq 2$, siedzących przy okrągłym stole zajmuje się wyłącznie myśleniem i jedzeniem. Pomiędzy każdymi dwoma filozofami leży jedna pałeczka. Do jedzenia filozof potrzebuje jednocześnie pałeczek leżących bezpośrednio po jego lewej i prawej stronie. Rozważmy następujące rozwiązanie tego problemu korzystające z tablicy $S[N]$ semaforów binarnych o początkowych wartościach równych 1 i z semafora L o początkowej wartości $N - 1$.

```
1 process Filozof (i: 0..N - 1) {
2   while (true) {
3     // Myślę.
4     P(L);
5     P(S[i]);
6     P(S[(i + 1) % N]);
7     // Jem.
8     V(S[i]);
9     V(S[(i + 1) % N]);
10    V(L);
11  }
12 }
```

- (a) Jeśli semafony S i L są semaforami słabymi, to rozwiązanie ma własność żywotności.
- (b) Jeśli semafony S są semaforami słabymi, a L jest semaforem silnie uczciwym, to rozwiązanie ma własność żywotności.
- (c) Jeśli semafony S i L są semaforami silnie uczciwymi, to rozwiązanie ma własność żywotności.

28. Blokada wirująca (ang. *spin lock*) to mechanizm synchronizacji

- (a) stosowany w modelu scentralizowanym;
- (b) wymagający aktywnego oczekiwania procesów;
- (c) zapewniający własność bezpieczeństwa.

29. W systemie operacyjnym ze stronicowaniem na żądanie błąd braku strony

- (a) jest zgłaszany przez system operacyjny;
- (b) jest obsługiwany przez system operacyjny;
- (c) powoduje przerwanie wykonania bieżącego rozkazu procesora.

30. Fragmentacja zewnętrzna pamięci

- (a) może wystąpić przy zarządzaniu pamięcią metodą stronicowania;
- (b) polega na tym, że część obszaru przydzielonego procesowi pozostaje niewykorzystana;
- (c) może wystąpić przy zarządzaniu pamięcią metodą stref dynamicznych.