PESEL: | | | | | | | | | | | |

Uniwersytet Warszawski
Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki

Egzamin wstępny na studia 2 stopnia na kierunku INFORMATYKA

21 września 2021 roku

Czas rozwiązywania: 150 minut

W każdym spośród 30 zadań podane są trzy warianty: (a), (b) oraz (c). W kratce przy każdym z wariantów należy odpowiedzieć, czy jest on prawdziwy, wpisując drukowanymi literami `TAK` *albo* `NIE`*. W przypadku omyłkowego wpisu kratkę należy przekreślić i napisać jedno z tych słów po jej lewej stronie.*

Przykład poprawnego rozwiązania zadania

4. Każda liczba całkowita postaci $10^n - 1$, gdzie n jest całkowite i dodatnie,

`TAK` (a) dzieli się przez 9;
`NIE` (b) jest pierwsza;
`TAK` (c) jest nieparzysta.

Na stronach testu można pisać wyłącznie we wskazanych wyżej miejscach i jedynie słowa `TAK` *oraz* `NIE`*. Pisać należy długopisem lub piórem.*

Zasady punktacji

Kandydat zdobywa punkty „duże” (od 0 do 30) i punkty „małe” (od 0 do 90):

- *jeden punkt „duży” kandydat uzyskuje za zadanie, w którym poprawnie wskazał prawdziwość albo fałsz każdego z trzech związanych z tym zadaniem wariantów odpowiedzi;*
- *jeden punkt „mały” kandydat uzyskuje za każde poprawne wskazanie prawdziwości albo fałszu pojedynczego wariantu odpowiedzi. Oznacza to, że 3 „małe” punkty uzyskane w jednym zadaniu składają się na jeden „duży” punkt.*

Ostatecznym wynikiem egzaminu jest liczba

$$W = D + m/100$$

gdzie D oznacza liczbę „dużych”, a m liczbę „małych” punktów. Na przykład: 5,50 oznacza, że kandydat poprawnie wskazał w całym teście prawdziwość albo fałsz łącznie 50 wariantów odpowiedzi, w tym każdego z trzech wariantów dla pewnych pięciu zadań.

Zasadniczą rolę w ostatecznym wyniku testu mają punkty „duże”. Punkty „małe” zwiększają rozdzielczość, jeśli wielu kandydatów dostało tyle samo „dużych” punktów.

Powodzenia!

1. Ciąg $\langle a_n \rangle_{n=1}^{\infty}$, gdzie $a_n = \sum_{k=1}^{n} k^2/n^3$, jest

- [ ] (a) ograniczony;
- [ ] (b) zbieżny;
- [ ] (c) zawarty w przedziale $[0, 1]$.

2. Załóżmy, że $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest ciągła, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Wynika z tego, że

- [ ] (a) zbiór wartości f na dowolnym ograniczonym podzbiorze $\mathbb{R}$ jest ograniczony;
- [ ] (b) f ma co najmniej 3 miejsca zerowe;
- [ ] (c) f ma skończenie wiele miejsc zerowych.

3. Funkcja $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{2021}(x-1)^n$ jest

- [ ] (a) dobrze określona dla $x \in \left[\frac{1}{4}, \frac{7}{4}\right]$;
- [ ] (b) dobrze określona na pewnym przedziale otwartym zawierającym 2;
- [ ] (c) różniczkowalna na pewnym przedziale otwartym.

4. Załóżmy, że macierz $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ $(n \in \mathbb{N},\ n > 0)$ ma następującą własność: dla każdego $b \in \mathbb{R}^n$ równanie $Ax = b$ ma dokładnie jedno rozwiązanie $x \in \mathbb{R}^n$. Wynika z tego, że

- [ ] (a) rząd macierzy A jest równy n;
- [ ] (b) istnieje wektor $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$, taki że $Ax = 0$;
- [ ] (c) A jest macierzą pewnego izomorfizmu $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

5. $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ jest przestrzenią euklidesową i $a, b, c \in X$. Wynika z tego, że

- [ ] (a) jeżeli układ a, b, c jest ortonormalny, to wektory $2a + 2b + c$ i $a - 3b + 4c$ są prostopadłe;
- [ ] (b) jeżeli $\langle a - b + 3c, a - b + 3c\rangle = 0$, to wektory a, b, c są liniowo zależne;
- [ ] (c) jeżeli $\langle a, a\rangle = \langle b, b\rangle$, to $a = b$.

6. Dziedziną funkcji F jest zbiór wszystkich relacji równoważności w zbiorze $\mathbb{N}$, a wartość funkcji $F(r)$ to zbiór wszystkich klas abstrakcji relacji r. Wynika z tego, że

- [ ] (a) funkcja F jest różnowartościowa;
- [ ] (b) zbiór wartości funkcji F jest elementem zbioru $\mathrm{P}(\mathrm{P}(\mathrm{P}(\mathbb{N})))$;
- [ ] (c) przeciwobraz rodziny $\mathrm{P}(\{A \in \mathrm{P}(\mathbb{N}) : |A| = \aleph_0\})$ względem funkcji F jest niepusty.

7. Rodzina wszystkich skończonych podzbiorów $\mathbb{N}$ jest zamknięta ze względu na

- [ ] (a) sumowanie przeliczalnych rodzin zbiorów;
- [ ] (b) dopełnienie;
- [ ] (c) przecięcie skończonej liczby zbiorów.

8. Niech $n \geq 3$. Prawdopodobieństwo, że w losowej permutacji zbioru $\{1, \ldots, n\}$ liczby $1, 2$ i 3 są w tym samym cyklu, wynosi

- [ ] (a) $1/3$;
- [ ] (b) $1/6$;
- [ ] (c) $6/n$.

9. Dla $n, k \in \mathbb{N}$, gdzie $n \geq 2k$, liczba takich rozwiązań równania $x_1 + \cdots + x_k = n$, że x_i są liczbami naturalnymi większymi lub równymi 2, jest równa

- [ ] (a) $\binom{n-k-1}{k-1}$;
- [ ] (b) $\binom{n-1}{k-1}$;
- [ ] (c) $\binom{n+k-1}{k-1}$.

10. Dana jest przestrzeń probabilistyczna $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ i zdarzenia $A, B \in \mathcal{F}$, takie że $P(A) = \frac{1}{3}$ i $P(B) = \frac{2}{3}$. Wynika z tego, że

- [ ] (a) A i B są niezależne wtedy i tylko wtedy, gdy $P(A \cup B) < 1$;
- [ ] (b) jeśli $P(A \mid B) = \frac{1}{4}$, to $P(B \mid A) = \frac{1}{2}$;
- [ ] (c) jeśli $P(B \mid A) = \frac{1}{2}$, to $P(B \mid \Omega - A) = \frac{3}{4}$.

11. Rzucamy 10 razy symetryczną monetą. Wynika z tego, że

- [ ] (a) prawdopodobieństwo, że wyrzucimy 10 orłów, jest $1/100$;
- [ ] (b) prawdopodobieństwo, że wyrzucimy co najmniej 6 orłów pod warunkiem, że w pierwszym rzucie wyrzuciliśmy orła, jest $1/2$;
- [ ] (c) prawdopodobieństwo, że w ostatnim rzucie wyrzuciliśmy orła pod warunkiem, że w pierwszych 9 rzutach wyrzuciliśmy orły, jest mniejsze niż $1/2$.

12. A jest rzeczywistą macierzą nieosobliwą $n \times n$, natomiast $b \in R^n$. Wynika z tego, że

- [ ] (a) jeśli A ma co najwyżej $3n + 1$ niezerowych elementów, to koszt obliczenia jej rozkładu LU algorytmem eliminacji Gaussa z wyborem elementu głównego w kolumnie jest $\mathcal{O}(n^2)$;
- [ ] (b) jeśli rozkład QR macierzy A da się wyznaczyć algorytmem o koszcie $\mathcal{O}(n^2)$, to koszt wyznaczenia rozwiązania x równania $Ax = b$ jest $\mathcal{O}(n^2)$;
- [ ] (c) jeśli A nie jest symetryczna i jej uwarunkowanie w normie $\|\cdot\|_2$ jest równe 2^{n-1}, to dla dostatecznie dużych n koszt wyznaczenia rozkładu LU tej macierzy wynosi co najmniej $\frac{4}{3}n^4$ flopów.

13. Każdy algorytm działający na zbiorze 4 różnych liczb wymaga wykonania na jego elementach

- [ ] (a) co najmniej 4 porównań dla wskazania elementu najmniejszego;
- [ ] (b) co najmniej 5 porównań dla wskazania elementu drugiego co do wielkości;
- [ ] (c) co najmniej 5 porównań dla wskazania elementów najmniejszego i największego.

14. Rozważmy algorytm sortowania liczb całkowitych Sort:

```
for (i = 0; i < n; i++){
  v = a[i]; j = i;
  while ((j > 0) && (a[j-1] > v)) {
     a[j] = a[j-1]; j--;
  }
  a[j] = v;
}
```

Dla $n = 2021$ i tablicy `a[0..n-1]` zawierającej permutację liczb $1, 2, \ldots, n$, liczba przypisań „`a[j] = a[j-1]`” wykonywanych w algorytmie Sort wynosi

- (a) w pesymistycznym przypadku – co najwyżej 2000000;
- (b) w średnim przypadku, w modelu losowej permutacji – co najmniej 500000;
- (c) 1, dla dokładnie 2021 permutacji wejściowych.

15. Jeśli $K, L \subseteq \Sigma^*$ są językami bezkontekstowymi nad alfabetem Σ, to

- (a) ich suma $K \cup L$ jest językiem bezkontekstowym;
- (b) ich przecięcie $K \cap L$ jest językiem bezkontekstowym;
- (c) ich konkatenacja KL (czyli zbiór słów postaci wv, gdzie $w \in K$ i $v \in L$) jest językiem bezkontekstowym.

16. Rozważmy kodowanie binarne liczb naturalnych: $(n)_2 \in \{0, 1\}^*$. Język kodów

- (a) liczb podzielnych przez 2021 jest regularny;
- (b) liczb będących kwadratami liczb naturalnych jest regularny;
- (c) liczb postaci n^n (dla naturalnego n) jest bezkontekstowy.

17. Dany jest program w Javie:

```java
class A {
    static int i1;
    int i2;
}

public class Main {

    public static void main(String[] args) {
        A a1, a2;
    }

}
```

Podczas wykonywania tego programu

- (a) powstaną dwa obiekty klasy A;
- (b) powstaną dwa egzemplarze pola i1;
- (c) powstanie jeden egzemplarz pola i2.

18. Dana jest definicja klasy w Javie:

```java
final class A {

    private A x;

    A() {
        x = new A(this);

    }

    private A(A y) {
        x = y;
    }

    static void f() {
        new A();
    }

    static boolean g(A y) {
        return y != null && y == y.x;
    }

    static boolean h(A y) {
        return y == null || y.equals(y.x);
    }

}
```

W programie jednowątkowym

- [ ] (a) wykonanie metody f może się zakończyć wyjątkiem z podklasy klasy Exception;
- [ ] (b) metoda g dla każdego argumentu daje ten sam wynik;
- [ ] (c) metoda h dla każdego argumentu daje ten sam wynik.

19. Rozważmy strukturę relacyjną, której nośnikiem jest zbiór liczb całkowitych, a wszystkie symbole operacji i relacji mają standardowe znaczenie. O każdej z poniższych trójek Hoare'a stwierdź, czy jest ona prawdziwa w logice Hoare'a dla dowodzenia poprawności częściowej programów:

- [ ] (a) $\{\texttt{true}\}$ `x := x+1` $\{x = x + 1\}$
- [ ] (b) $\{x \leq 2\}$ `if x>=2 then x := x+2 else x := 4` $\{x = 4\}$
- [ ] (c) $\{x * y = z\}$ `while x>1 do (x := x-1; z := z-y)` $\{y \leq z\}$

20. Rozważmy klienta HTTP, który zamierza pobrać stronę internetową znajdującą się pod określonym adresem URL. Początkowo adres IP serwera HTTP nie jest znany klientowi. Oprócz protokołu HTTP, będzie w tym przypadku użyty

- [ ] (a) protokół DNS w warstwie aplikacji;
- [ ] (b) protokół IP w warstwie transportowej;
- [ ] (c) protokół UDP w warstwie sieci.

21. ARP jest

- [ ] (a) protokołem przeznaczonym do tłumaczenia adresów warstwy łącza na adresy warstwy sieciowej;
- [ ] (b) używany zarówno z IPv4, jak i IPv6;
- [ ] (c) zaprojektowany do stosowania wyłącznie w sieci Ethernet.

22. Ścisła kontrola dostępu to sposób zarządzania dostępem do zasobów komputera, w którym

- [ ] (a) każdy użytkownik systemu określa ściśle reguły dostępu do swoich zasobów;
- [ ] (b) zasady dostępu do zasobów są określane przez centralnie określone ścisłe reguły;
- [ ] (c) zasady dostępu do zasobów są określane na bazie ściśle sformułowanych kontraktów negocjowanych pomiędzy poszczególnymi użytkownikami systemu.

23. Zmniejszająca szanse zajścia ataku przez przepełnienie bufora technika kanarków polega na

- [ ] (a) stosowaniu przy każdym dostępie do komórek bufora sprawdzenia, czy dostęp zachodzi w zakresie zadeklarowanym przez programistę;
- [ ] (b) wstawianiu na stosie między adresem powrotu z procedury a adresem końca bufora specjalnego wzorca bitowego, którego wartość jest sprawdzana przed wyjściem z procedury;
- [ ] (c) alokowaniu buforów, tak że górne ich granice wypadają na granicy strony, a następna strona nie należy do procesu.

24. Optymalny algorytm wymiany stron, minimalizujący liczbę błędów braków strony

- [ ] (a) cechuje się anomalią Belady'ego;
- [ ] (b) jest stosowany jedynie w tych systemach, w których czas dostępu do urządzenia stronicującego jest znacznie dłuższy niż czas dostępu do pamięci operacyjnej;
- [ ] (c) jest stosowany w większości współczesnych systemów operacyjnych.

25. W pewnym systemie operacyjnym z wirtualizacją pamięci strona ma rozmiar 16 KiB, adres wirtualny jest 64-bitowy, a adres fizyczny jest 48-bitowy. Istnieje taka konfiguracja mapowania adresów dwóch różnych procesów A i B, że

- [ ] (a) adres wirtualny $(\mathrm{a007})_{16}$ procesu A jest odwzorowywany na adres fizyczny $(\mathrm{e007})_{16}$;
- [ ] (b) adres wirtualny $(\mathrm{c009})_{16}$ procesu B jest odwzorowywany na adres fizyczny $(\mathrm{d009})_{16}$;
- [ ] (c) zarówno adres wirtualny $(\mathrm{1300f})_{16}$ procesu A, jak i adres wirtualny $(\mathrm{1700f})_{16}$ procesu B są odwzorowywane na ten sam adres fizyczny $(\mathrm{1b00f})_{16}$.

26. Poniższa próba rozwiązania problemu wzajemnego wykluczania dla dwóch procesów z pomocą arbitra pamięci:

```
int x = 0;
int y = 0;
int z = 0;

process P1 {
    for (;;) {
        własne_sprawy();
        x = 1;
        z = 2;
        while (y == z) {};
        sekcja_krytyczna();
        x = 0;
    }
}

process P2 {
    for (;;) {
        własne_sprawy();
        y = 2;
        z = 1;
        while (x == z) {};
        sekcja_krytyczna();
        y = 0;
    }
}
```

☐ (a) spełnia warunek bezpieczeństwa;

☐ (b) jest żywotna;

☐ (c) gwarantuje, że w czasie, gdy zmienna `x` ma wartość 1, proces `P2` wejdzie do sekcji krytycznej co najwyżej raz.

27. Monitor o semantyce Hoare'a ze zmienną warunkową `c` eksportuje jedną procedurę o nazwie `p` i treści `do {signal(c); wait(c);} while(empty(c));`. Wynika z tego, że

   (a) więcej niż jeden proces na raz może być wstrzymany na wykonaniu operacji `wait(c)`;

   (b) jeśli dwa procesy wywołają procedurę `p`, to proces, który zrobił to jako pierwszy, kiedyś zakończy jej wykonanie;

   (c) procesy kończą wykonanie procedury `p` w kolejności, w jakiej ją wywoływały.

28. Załóżmy, że tabela R zawiera r wierszy a tabela S zawiera s wierszy. Zapytanie

```
SELECT * FROM R LEFT JOIN S ON R.A = S.A
```

daje w wyniku

☐ (a) co najmniej r wierszy;

☐ (b) co najmniej s wierszy;

☐ (c) co najwyżej $r \cdot s$ wierszy.

29. Przypuśćmy, że tabeli R jest n różnych wierszy i nie występują w niej wartości *null*. Wynika z tego, że

☐ (a) dla każdej kolumny A tabeli R, rzut $\pi_A(R)$ zawiera n różnych wierszy;

☐ (b) dla pewnej kolumny A tabeli R, rzut $\pi_A(R)$ zawiera n różnych wierszy;

☐ (c) dla pewnej kolumny A tabeli R, rzut $\pi_A(R)$ zawiera co najwyżej $n-1$ różnych wierszy.

30. W protokole HTTP/1.1

☐ (a) zawsze po przesłaniu żądanej strony połączenie się zamyka;

☐ (b) jeśli klient tak zażąda, to połączenie pozostaje otwarte po przesłaniu strony;

☐ (c) odpowiedź na drugie żądanie może przyjść przed odpowiedzią na pierwsze.