

PESEL:

UNIwersytet Warszawski
Wydział Matematyki, Informatyki
i Mechaniki
Egzamin wstępny na studia 2 stopnia
na kierunku INFORMATYKA

18 września 2020 roku

Czas rozwiązywania: 150 minut

W każdym spośród 30 zadań podane są trzy warianty: (a), (b) oraz (c). W kratce przy każdym z wariantów należy odpowiedzieć, czy jest on prawdziwy, wpisując drukowanymi literami TAK albo NIE. W przypadku omyłkowego wpisu kratkę należy przekreślić i napisać jedno z tych słów po jej lewej stronie.

Przykład poprawnego rozwiązania zadania

4. Każda liczba całkowita postaci $10^n - 1$, gdzie n jest całkowite i dodatnie,

- TAK (a) dzieli się przez 9;
 NIE (b) jest pierwsza;
 TAK (c) jest nieparzysta.

Na stronach testu można pisać wyłącznie we wskazanych wyżej miejscach i jedynie słowa TAK oraz NIE. Pisać należy długopisem lub piórem.

Zasady punktacji

Kandydat zdobywa punkty „duże” (od 0 do 30) i punkty „małe” (od 0 do 90):

- jeden punkt „duży” kandydat uzyskuje za zadanie, w którym poprawnie wskazał prawdziwość albo fałsz każdego z trzech związanych z tym zadaniem wariantów odpowiedzi;*
- jeden punkt „mały” kandydat uzyskuje za każde poprawne wskazanie prawdziwości albo fałszu pojedynczego wariantu odpowiedzi. Oznacza to, że 3 „małe” punkty uzyskane w jednym zadaniu składają się na jeden „duży” punkt.*

Ostatecznym wynikiem egzaminu jest liczba

$$W = D + m/100$$

gdzie D oznacza liczbę „dużych”, a m liczbę „małych” punktów. Na przykład: 5,50 oznacza, że kandydat poprawnie wskazał w całym teście prawdziwość albo fałsz łącznie 50 wariantów odpowiedzi, w tym każdego z trzech wariantów dla pewnych pięciu zadań.

Zasadniczą rolę w ostatecznym wyniku testu mają punkty „duże”. Punkty „małe” zwiększają rozdzielczość, jeśli wielu kandydatów dostało tyle samo „dużych” punktów.

Powodzenia!

1. Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} 7^{-\sqrt{n}}$
- (a) jest rozbieżny;
 - (b) ma sumę większą od $1/7$;
 - (c) ma sumę większą od $1/6$.
2. Funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest różniczkowalna i $f'(0) = 0$. Wynika z tego, że
- (a) f ma w zerze ekstremum lokalne;
 - (b) f' jest ciągła w zerze;
 - (c) jeśli istnieje $f''(0)$ i jest dodatnia, to f ma minimum lokalne w zerze.
3. Szereg $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ jest zbieżny dla wszystkich $x \in (-1/2, 1/2)$ oraz rozbieżny dla $x = 1/2$. Wynika z tego, że
- (a) funkcja $x \mapsto S(x)$ ma pochodne wszystkich rzędów na przedziale $(-1/2, 1/2)$;
 - (b) szereg $S(x)$ jest zbieżny dla $x = -1/2$;
 - (c) nierówności $|a_n| < e^n$ zachodzą dla wszystkich dostatecznie dużych n .
4. X jest przestrzenią liniową nad ciałem liczb rzeczywistych i wektory $a, b, c, d \in X$ są liniowo niezależne. Wynika z tego, że
- (a) $\dim X \leq 4$;
 - (b) $\dim X = 4$;
 - (c) $\dim X \geq 4$.
5. Liczba zespolona λ jest wartością własną macierzy A o współczynnikach rzeczywistych i wymiarach $n \times n$, gdzie $n > 1$. Wynika z tego, że
- (a) liczba $-\lambda$ jest wartością własną macierzy A ;
 - (b) liczba $\bar{\lambda}$ jest wartością własną macierzy A ;
 - (c) liczba λ^2 jest wartością własną macierzy A^2 .
6. W porządku częściowym $\langle P(\mathbb{N}), \subseteq \rangle$
- (a) każdy łańcuch ma element najmniejszy;
 - (b) przecięcie dowolnej niepustej rodziny łańcuchów jest łańcuchem;
 - (c) suma dwóch łańcuchów jest łańcuchem.
7. Następująca relacja na ciągach liczb rzeczywistych jest relacją równoważności:
dwa ciągi $\{a_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ i $\{b_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ są w relacji wtedy i tylko wtedy, gdy
- (a) ich elementy na parzystych pozycjach są równe, tzn. $\forall i \in \mathbb{N} a_{2i} = b_{2i}$;
 - (b) mają wspólny podciąg, tzn. istnieje ściśle rosnący ciąg indeksów $\{i_k\}_{k \in \mathbb{N}}$, taki że $\forall k \in \mathbb{N} a_{i_k} = b_{i_k}$;
 - (c) $\forall \epsilon > 0 \exists n \in \mathbb{N} \forall i > n |a_i - b_i| < \epsilon$.

8. Wartość wyrażenia $\sum_{i=0}^{2020} \binom{2020}{i} \binom{i}{3}$ jest podzielna przez

(a) 2020;

(b) 2^{2020} ;

(c) 2^{2019} .

9. Niech $G = (V, E)$ będzie grafem, w którym $V = \{1, 2, \dots, 6\}$ oraz $\{i, j\} \in E$ wtedy i tylko wtedy, gdy $|i - j| > 2$. Wynika z tego, że

(a) G jest dwudzielny;

(b) cykl 5-wierzchołkowy jest podgrafem G ;

(c) cykl 4-wierzchołkowy jest podgrafem indukowanym G .

10. Rzucamy symetryczną kostką sześcienną do uzyskania pierwszej szóstki. Niech X będzie liczbą wykonanych rzutów. Wynika z tego, że

(a) wartość oczekiwana $EX = 6$;

(b) $P(X \leq 2) \leq \frac{1}{3}$;

(c) $P(X \leq 2) \geq \frac{1}{3}$.

11. Niech X będzie rzeczywistą zmienną losową, taką że jej wartość oczekiwana EX jest równa 10. Wynika z tego, że

(a) $E(X^2) \leq 100$;

(b) $E(X^3) \geq 1000$;

(c) $P(X \geq 20) \leq 1/2$.

12. Najmniejsza możliwa wysokość (czyli liczba krawędzi na najdłuższej ścieżce od korzenia do liścia) DFS-drzewa w spójnym grafie G o 2020 wierzchołkach wynosi

(a) 2, jeśli G jest dwudzielny;

(b) 2, jeśli G jest dwuspójny wierzchołkowo;

(c) 2, jeśli G jest drzewem.

13. Algorytmem działającym *w miejscu*, czyli modyfikującym co najwyżej stałą liczbę komórek pamięci oprócz danych wejściowych, jest

(a) algorytm KMP wyszukiwania wzorca w tekście;

(b) HeapSort;

(c) iteracyjna wersja algorytmu Hoare'a wyszukiwania mediany w ciągu liczbowym.

14. Niech $L \subseteq \Sigma^*$ będzie językiem nad skończonym alfabetem Σ . Wynika z tego, że

(a) jeśli język L jest skończony, to jest regularny;

(b) jeśli język L jest regularny i nieskończony, to zawiera słowo postaci $uv^{2020}w$ dla pewnych $u, v, w \in \Sigma^*$, przy czym v jest niepuste;

(c) jeśli język L jest regularny, to język $\Sigma^* \setminus L$ też jest regularny.

15. Dany jest automat niedeterministyczny \mathcal{A} rozpoznający język $L \subseteq \{a, b\}^*$. Następujący problem obliczeniowy można rozwiązać w czasie wielomianowym względem rozmiaru opisu automatu \mathcal{A}

- (a) skonstruowanie automatu niedeterministycznego rozpoznającego język $L \cdot L$;
- (b) skonstruowanie automatu niedeterministycznego rozpoznającego język $\Sigma^* \setminus L$;
- (c) skonstruowanie automatu niedeterministycznego rozpoznającego język $L \cap (ab)^*$.

16. Jeżeli $K, L \subseteq \Sigma^*$ są językami obliczalnymi, to obliczalny jest również język

- (a) $K \cup L$;
- (b) $K \cap L$;
- (c) $K \setminus \{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$.

17. Dany jest program wraz z warunkiem wstępnym i końcowym (w strukturze relacyjnej, której nośnikiem jest zbiór liczb całkowitych, a wszystkie symbole operacji i relacji mają standardowe znaczenie)

```
{s = 0 and j = n and n > 10}
while j > 0 do
  begin s := s + 2; j := j - 1 end
{s = 2 * n}
```

Następująca formuła jest niezmiennikiem pętli umożliwiającym wykazanie jej częściowej poprawności względem podanych warunków

- (a) $s + 2 * j = 2 * n$;
- (b) $s + 2 * j = 2 * n \wedge j \geq 0$;
- (c) $s + 2 * j = 2 * n \wedge n > 0 \wedge j > 0$.

18. Dla dowolnej macierzy B rozmiaru $n \times n$, gdzie $n > 0$, zdefiniujemy jej normę jako $\|B\|_1 = \max_{j=1 \dots n} \sum_{i=1}^n |b_{ij}|$ oraz przez $\text{cond}(B)$ oznaczymy uwarunkowanie macierzy B , mierzone w tej normie. Niech $0 < \epsilon < 1$ i rozważmy macierz A_n rozmiaru $n \times n$, taką że $a_{1j} = 1 = a_{1n}$ oraz $a_{j+1,j} = \epsilon$ dla $j = 1, \dots, n-1$, a pozostałe elementy są zerami:

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 & 1 \\ \epsilon & & & \\ & \ddots & & \\ & & & \epsilon \end{pmatrix}$$

Wynika z tego, że

- (a) $\text{cond}(A_n)$ zależy od n ;
- (b) układ równań $A_n x = b \in R^n$ można rozwiązać w czasie $O(n)$;
- (c) $\text{cond}(A_{2020}) > \frac{2020}{2021}$.

19. Na trasie między hostem A a hostem B znajdują się trzy routery. Host A wysyła do hosta B pakiet UDP o wielkości przekraczającej MTU sieci, do której host A jest przyłączony. Hosty A i B mają pojedyncze interfejsy sieciowe. Wynika z tego, że

- (a) w warstwie sieci hosta A pakiet zostanie podzielony na mniejsze fragmenty;
- (b) jeden z routerów na trasie wykona defragmentację pakietu wysłanego z hosta A;
- (c) utrata jednego z fragmentów z powodu przeciążenia sieci spowoduje utratę całego pakietu UDP.

20. Przełącznik z obsługą VLAN to urządzenie, które

- (a) przełącza pakiety pomiędzy segmentami sieci na podstawie adresów fizycznych;
- (b) umożliwia podział domeny rozgłoszeniowej warstwy łącza;
- (c) umożliwia separację ruchu lokalnego w różnych wirtualnych sieciach VLAN.

21. Dany jest program w Javie:

```
1 class A{
2     private int i = 0;
3     private String s = "";
4     private int [] t = new int [1];
5
6     void m(){
7         B.m(i,s,t);
8     }
9
10    @Override
11    public String toString(){
12        return "i=" + i + ", s=" + s + ", t[0]=" + t[0];
13    }
14 }
15
16 class B{
17     public static void m(int i, String s, int [] t){
18         i += 1;
19         s += "1";
20         t[0] += 1;
21     }
22 }
23
24 public class Zad {
25     public static void main(String [] args){
26         A a = new A();
27         System.out.println(a);
28         a.m();
29         System.out.println(a);
30     }
31 }
```

Po wywołaniu metody a.m() w funkcji main wypisze się inna wartość niż przed tym wywołaniem dla

- (a) i
- (b) s
- (c) t[0]

22. Dany jest program w C++:

```
1  class A{
2      int i;
3  public:
4      A(int i):i(i){}
5      A(){}
6  };
7
8  class B: public A{
9  public:
10     //B():A(1){} // #1
11     //B():i(1){} // #2
12     //B(){i=1;} // #3
13 };
14
15 int main(int , char *[]) {
16     B b;
17 }
```

Po odkomentowaniu wskazanej definicji konstruktora w klasie B program skompiluje się bez komunikatów o błędach.

- (a) B():A(1){} // #1
- (b) B():i(1){} // #2
- (c) B(){i=1;} // #3

23. Współczesne RFID nie stosują szyfrowania szyfrem IDEA z kluczami 128-bitowymi, ponieważ

- (a) mają za małą moc obliczeniową;
- (b) mają za małą moc prądu podczas pracy;
- (c) szyfr IDEA został złamany.

24. Tabela relacyjnej bazy danych ma kolumny $\{A, B, C\}$ i zależności funkcyjne $\{AB \rightarrow C, C \rightarrow A\}$. Wynika z tego, że

- (a) tabela ta jest w trzeciej postaci normalnej;
- (b) tabela ta jest w czwartej postaci normalnej;
- (c) tabelę tę można sprowadzić do postaci normalnej Boyce'a-Codda z zachowaniem zależności funkcyjnych i informacji.

25. Dana jest tabela R(a,b,c,d) oraz szkielet zapytania

```
SELECT [...]  
FROM R  
GROUP BY a,b;
```

Poprawne wyrażenie SQL otrzymamy, wstawiając w miejsce [...]

- (a) MIN(c+d)
- (b) a,b
- (c) b,c

26. W poniższym rozwiązaniu problemu pięciu filozofów typ danych `semaphore` reprezentuje semafore silnie uczciwe. Wiadomo, że każdy proces rozpoczynający wykonanie funkcji `je` zakończy ją poprawnie w skończonym czasie.

```
1 semaphore w[5] = {1, 1, 1, 1, 1};
2
3 process F (i: 0..4) {
4     while (true) {
5         myś li ();
6         if (i==4) {
7             P(w[0]);
8             P(w[4]);
9         } else {
10            P(w[i]);
11            P(w[(i+1)%5]);
12        }
13        je ();
14        V(w[(i+1)%5]);
15        V(w[i]);
16    }
17 }
```

To rozwiązanie

- (a) ma własność bezpieczeństwa;
- (b) jest wolne od zakleszczeń;
- (c) nie prowadzi do zagłodzenia żadnego procesu.
27. W klasycznym monitorze Hoare'a zmienne warunkowe to zmienne służące do wstrzymywania procesów wewnątrz monitora. Operacje na zmiennych warunkowych noszą zwyczajowe nazwy `wait` i `signal`. Proces, który wykona operację `wait` na zmiennej warunkowej `c`,
- (a) jest bezwarunkowo wstrzymywany aż do chwili, gdy wszystkie inne procesy opuszczą monitor;
- (b) jest wstrzymywany pod warunkiem, że inny proces jest już w monitorze, natomiast w przeciwnym razie kontynuuje działanie;
- (c) jest bezwarunkowo wstrzymywany aż do chwili, gdy inny proces wykona operację `signal` na tej samej zmiennej warunkowej `c`.
28. Każdy rozkaz maszynowy wykonuje się atomowo
- (a) w modelu von Neumanna;
- (b) w procesorze 8080;
- (c) w procesorze wielordzeniowym o architekturze x86.

29. W pewnym procesorze adresy wirtualne są 64-bitowe. Rozmiar strony, tablicy stron i katalogu tablic stron wynosi 16 MiB. Rozmiar jednego wpisu w tablicy stron i katalogu tablic stron wynosi 16 B. Adres wirtualny podzielony jest na trzy pola w następujący sposób:

- (a) przesunięcie ma 20 bitów;
- (b) numer strony ma 20 bitów;
- (c) numer w katalogu tablic stron ma 24 bity.

30. Selektor CSS `ul#primary-nav li.active` jest bardziej specyficzny (ważniejszy) niż

- (a) `ul.class li.active`
- (b) `ul > .class > li + .active`
- (c) `nav > a:hover::before`