

PESEL: 

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

UNIwersytet Warszawski  
Wydział Matematyki, Informatyki  
i Mechaniki  
Egzamin wstępny na studia II stopnia  
na kierunku INFORMATYKA

20 września 2019 roku

*Czas rozwiązywania: 150 minut*

*W każdym spośród 30 zadań podane są trzy warianty: (a), (b) oraz (c). W kratce przy każdym z wariantów należy odpowiedzieć, czy jest on prawdziwy, wpisując drukowanymi literami TAK albo NIE. W przypadku omyłkowego wpisu kratkę należy przekreślić i napisać jedno z tych słów po jej lewej stronie.*

**Przykład poprawnego rozwiązania zadania**

4. Każda liczba całkowita postaci  $10^n - 1$ , gdzie  $n$  jest całkowite i dodatnie,

- |     |                         |
|-----|-------------------------|
| TAK | (a) dzieli się przez 9; |
| NIE | (b) jest pierwsza;      |
| TAK | (c) jest nieparzysta.   |

*Na stronach testu można pisać wyłącznie we wskazanych wyżej miejscach i jedynie słowa TAK oraz NIE. Pisać należy długopisem lub piórem.*

**Zasady punktacji**

*Kandydat zdobywa punkty „duże” (od 0 do 30) i punkty „małe” (od 0 do 90):*

- jeden punkt „duży” kandydat uzyskuje za zadanie, w którym poprawnie wskazał prawdziwość albo fałsz każdego z trzech związanych z tym zadaniem wariantów odpowiedzi;*
- jeden punkt „mały” kandydat uzyskuje za każde poprawne wskazanie prawdziwości albo fałszu pojedynczego wariantu odpowiedzi. Oznacza to, że 3 „małe” punkty uzyskane w jednym zadaniu składają się na jeden „duży” punkt.*

*Ostatecznym wynikiem egzaminu jest liczba*

$$W = D + m/100$$

*gdzie  $D$  oznacza liczbę „dużych”, a  $m$  liczbę „małych” punktów. Na przykład: 5,50 oznacza, że kandydat poprawnie wskazał w całym teście prawdziwość albo fałsz łącznie 50 wariantów odpowiedzi, w tym każdego z trzech wariantów dla pewnych pięciu zadań.*

*Zasadniczą rolę w ostatecznym wyniku testu mają punkty „duże”. Punkty „małe” zwiększają rozdzielczość, jeśli wielu kandydatów dostało tyle samo „dużych” punktów.*

*Powodzenia!*

1. Szereg  $\sum_{n=1}^{\infty} 10^{-n!}$

- (a) jest zbieżny;  
 (b) ma sumę mniejszą od  $1/9$ ;  
 (c) ma sumę wymierną.

2. Funkcja  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  jest rosnąca. Wynika z tego, że

- (a) zbiór punktów ciągłości funkcji  $f$  jest nieprzeliczalny;  
 (b) funkcja  $f$  jest ciągła poza pewnym zbiorem skończonym;  
 (c) funkcja  $f$  jest różnowartościowa.

3. Ciąg wielomianów  $P_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $n = 1, 2, \dots$  jest zbieżny do funkcji  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  jednostajnie na każdym przedziale  $[a, b] \subset \mathbb{R}$ . Wynika z tego, że funkcja  $f$

- (a) jest wielomianem;  
 (b) jest nieograniczona na  $\mathbb{R}$ ;  
 (c) jest różniczkowalna w pewnym punkcie  $x \in \mathbb{R}$ .

4.  $A$  jest macierzą o 8 wierszach i 13 kolumnach, taką że  $\dim(\ker A) = 5$ . Wynika z tego, że

- (a) rząd macierzy  $A$  jest równy 3;  
 (b) rząd macierzy  $A^T$  jest równy 8;  
 (c)  $\dim(\ker A^T) = 5$ .

5.  $X$  i  $Y$  są przestrzeniami liniowymi nad ciałem  $\mathbb{R}$ ,  $f: X \rightarrow Y$  jest przekształceniem liniowym i układ wektorów  $x_1, x_2, \dots, x_{10} \in X$  jest bazą przestrzeni  $X$ . Wynika z tego, że

- (a) układ  $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_{10}) \in Y$  jest bazą przestrzeni  $Y$ ;  
 (b) jeżeli układ  $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_{10}) \in Y$  jest liniowo niezależny, to  $\dim Y \geq 10$ ;  
 (c) jeżeli układ  $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_{10}) \in Y$  jest liniowo niezależny, to przekształcenie  $f$  jest różnowartościowe.

6. Niech  $r$  i  $s$  będą relacjami równoważności na  $A$ . Wynika z tego, że relacją równoważności jest

- (a)  $r \cup s$ ;  
 (b)  $r \cap s$ ;  
 (c)  $A \times A \setminus r$ .

7. Niech  $\langle A, \leq \rangle$  będzie porządkiem częściowym,  $f: A \rightarrow A$ . Funkcja  $f$  ma punkt stały, jeśli

- (a)  $f$  jest funkcją monotoniczną;  
 (b)  $f$  jest funkcją ciągłą;  
 (c)  $A$  jest kratą zupełną i  $f$  jest funkcją ciągłą.

8. Dla dowolnej liczby całkowitej  $n \geq 1$  podzielna przez 3 jest liczba

(a)  $7^n - 1$ ;

(b)  $8^{3n} + 1$ ;

(c)  $2^{2^n} - 1$ .

9. Jeżeli  $A(x) = \frac{1}{1-x}$  a  $B(x)$  jest funkcją tworzącą ciąg  $\langle b_n \rangle$  określonego wzorem  $b_n = n + 1$ , to  $C(x) = A(x) \cdot B(x)$  jest funkcją tworzącą ciąg  $\langle c_n \rangle$  określonego wzorem

(a)  $c_n = (n + 1)^2 - \frac{n(n+1)}{2}$  dla  $n \geq 0$ ;

(b)  $c_n = (n + 1) + \sum_{i=0}^n i$  dla  $n \geq 0$ ;

(c)  $c_n = \frac{(n+1)^2+1}{2}$  dla  $n \geq 0$ .

10. Każdy graf nieplanarny o  $n$  wierzchołkach

(a) zawiera podgraf  $K_{3,3}$  lub  $K_5$ ;

(b) ma co najmniej  $3n - 5$  krawędzi;

(c) ma liczbę chromatyczną nie mniejszą niż 5.

11. Niech  $P(B_1) = 2/3$ ,  $P(B_2) = 1/3$ ,  $P(A|B_1) = 1/8$ ,  $P(A|B_2) = 1/4$ . Wynika z tego, że

(a)  $P(A \cap B_1) = 1/24$ ;

(b)  $P(A \cap B_2) = 1/12$ ;

(c)  $P(B_1|A) = 1/8$ .

12. Rzucamy dwa razy symetryczną kostką sześcienną. Niech  $A$  oznacza zdarzenie, że w pierwszym rzucie wypadła szóstka. Zdarzeniem niezależnym od  $A$  jest to, że

(a) w pierwszym rzucie wypadła jedynka;

(b) w drugim rzucie wypadła szóstka;

(c) w obu rzutach wypadło to samo.

13. Niech  $h$  będzie wysokością (czyli największą liczbą krawędzi na ścieżce od korzenia do liścia) DFS-drzewa rozpinającego pewnego  $n$ -wierzchołkowego, spójnego grafu  $G$ , gdzie  $n > 2019$ .

(a) Jeżeli  $h = n - 1$ , to  $G$  jest grafem pełnym.

(b) Jeżeli  $h = 1$ , to  $G$  jest drzewem.

(c) Jeżeli  $h = 2$ , to  $G$  ma więcej niż jedną dwuspójną składową.

14. Niech funkcja  $T_{a,b} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  będzie określona wzorem  $T_{a,b}(n) = aT_{a,b}(\lfloor n/b \rfloor) + n$  dla  $n > 0$  oraz  $T_{a,b}(0) = 0$ , gdzie  $a, b > 1$ . Wynika z tego, że

(a)  $T_{3,2}(n) = \Theta(n^{3/2})$ ;

(b)  $T_{3,3}(n) = \Theta(n \log n)$ ;

(c)  $T_{3,4}(n) = \Theta(n^{\log_4 3})$ .

15. Bezkontekstowy jest język

- (a) nad alfabetem  $\{0, 1\}$  składający się ze słów, w których liczba wystąpień cyfry 0 jest równa liczbie wystąpień cyfry 1;
- (b)  $\{1^{n^2} \mid n \geq 1\}$ ;
- (c)  $\{a^n b^n \mid n \geq 0\} \cup \{a^n b^{2n} \mid n \geq 0\}$ .

16. Następujący problem jest rozstrzygalny:

- (a) Dana jest gramatyka bezkontekstowa; stwierdzić, czy generowany przez nią język jest skończony.
- (b) Dana jest deterministyczna maszyna Turinga  $M$  oraz słowo  $w$ ; stwierdzić, czy  $M$  akceptuje słowo  $w$ .
- (c) Dany jest język bezkontekstowy  $L$  nad alfabetem  $\Sigma$  reprezentowany przez gramatykę bezkontekstową; stwierdzić, czy  $L \cap L^R = \emptyset$ , gdzie dla  $a_1, \dots, a_n \in \Sigma$ , jeśli  $w = a_1 \dots a_n$ , to  $w^R = a_n \dots a_1$ , zaś  $L^R = \{w^R \mid w \in L\}$ .

17. Niech  $Ide$  będzie zbiorem identyfikatorów zmiennych, a  $Loc = \{l_0, l_1, \dots\}$  będzie przeliczalnym zbiorem lokacji o zadanej numeracji. Niech  $Env = Ide \rightarrow Loc$ ,  $Store = Loc \rightarrow Z$ , a  $State = Env \times Store \times Z$ , gdzie  $Z$  jest zbiorem liczb całkowitych. Wartością zmiennej  $x \in Ide$  w stanie  $(\varrho, s, n) \in State$  nazywamy liczbę  $s(\varrho x) \in Z$ . Znaczenie programów definiuje funkcja semantyczna  $\mathcal{P}: Prog \rightarrow State \rightarrow State$  dana następującymi klauzulami semantycznymi:

$$\begin{aligned}\mathcal{P}[\text{init } x] (\varrho, s, n) &= (\varrho[x \mapsto l_n], s[l_n \mapsto 0], n + 1) \\ \mathcal{P}[\text{inc } x] (\varrho, s, n) &= (\varrho, s[(\varrho x) \mapsto (s(\varrho x) + 1)], n) \\ \mathcal{P}[\text{move}(x, y)] (\varrho, s, n) &= (\varrho[y \mapsto (\varrho x)], s[(\varrho x) \mapsto (s(\varrho y))], n) \\ \mathcal{P}[p_1; p_2] (\varrho, s, n) &= \mathcal{P}[p_2](\mathcal{P}[p_1](\varrho, s, n))\end{aligned}$$

W stanie po wykonaniu programu

`init x; init y; inc y; move(y,x); inc y`

- (a) zmienna  $x$  ma wartość 0;
- (b) zmienna  $y$  ma wartość 2;
- (c) zmienne  $x$  i  $y$  mają tę samą wartość.

18. Tabela T w relacyjnej bazie danych ma kolumny a, b, c, d, e. Wynika z tego, że

- (a) minimalna liczba kluczy tabeli T wynosi 5;
- (b) maksymalna liczba kluczy tabeli T wynosi 10;
- (c) jeśli reprezentacją zbioru zależności funkcyjnych tabeli T jest  $\{a \rightarrow b, c \rightarrow ade\}$ , to tabela T jest w trzeciej postaci normalnej.

19. Rozważmy instancję tabeli  $R$  o kolumnach  $A$  i  $B$  zawierającą tylko jedną krotkę  $(1, null)$ . Niepustą odpowiedź zwróci zapytanie

- (a) `SELECT * FROM R WHERE A=B`
- (b) `SELECT * FROM R WHERE A<>B`
- (c) `SELECT * FROM R WHERE A=B OR A<>B`

20. Niech będą dane węzły  $x_0 < x_1 < \dots < x_n$  oraz rzeczywiste współczynniki  $b_0, \dots, b_n$ . Rozważmy funkcję

$$w_n(x) = b_0 + \sum_{i=1}^n b_i \prod_{k=0}^{i-1} (x - x_k).$$

- (a) Dla danego  $y \in \mathbb{R}$ , wartość  $w_n(y)$  można obliczyć kosztem  $O(n)$  operacji arytmetycznych.
- (b) Jeśli  $b_0 = b_1 = \dots = b_n = 1$ , to  $w_n(x)$  jest funkcją stałą.
- (c) Jeśli  $x_i = b_i = i + 1$  dla  $i = 0, \dots, 2019$ , to  $w_{2019}(2) = 3$ .
21. Dany jest program w Javie:

```
1 abstract class A{
2     public void m1() {
3         System.out.println("A");
4     }
5     public abstract void m2();
6     public abstract void m3();
7 }
8
9 class B extends A{
10    public void m1() {
11        System.out.println("B");
12    }
13    public void m2() {
14        m1();
15    }
16    public void m3() {
17        super.m1();
18    }
19 }
20
21 class C extends B{
22    public void m1() {
23        System.out.println("C");
24    }
25 }
26
27 public class Zad {
28     public static void main(String[] s) {
29         A ob = new C();
30         //ob.m1();
31         //ob.m2();
32         //ob.m3();
33     }
34 }
```

Po odkomentowaniu wskazanej instrukcji, skompilowaniu i uruchomieniu program wypisze:

- (a) znak C po odkomentowaniu `ob.m1()`;
- (b) znak C po odkomentowaniu `ob.m2()`;
- (c) znak C po odkomentowaniu `ob.m3()`;

22. Dany jest program w C++:

```
1 #include <iostream>
2
3 class A{
4 public:
5     virtual void m1(){
6         cout << "A" << endl;
7     }
8     void m2(){
9         cout << "A" << endl;
10    }
11    void m3(){
12        m1();
13    }
14    void m4(){
15        m2();
16    }
17    virtual void m5() = 0;
18 };
19
20 class B: public A{
21 public:
22     void m1(){
23         cout << "B" << endl;
24     }
25     void m2(){
26         cout << "B" << endl;
27     }
28     void m5(){
29         m1();
30     }
31 };
32
33 int main() {
34     A* p = new B();
35     // p->m3();
36     // p->m4();
37     // p->m5();
38 }
```

Po odkomentowaniu wskazanej instrukcji, skompilowaniu i uruchomieniu program wypisze:

- (a) znak A po odkomentowaniu `p->m3()`;
- (b) znak A po odkomentowaniu `p->m4()`;
- (c) znak A po odkomentowaniu `p->m5()`;

23. Rozważmy następujące reguły CSS:

```
#p {color: yellow}    /* reguła 1 */
p { color:red }      /* reguła 2 */
p .over {color:green} /* reguła 3 */
```

- (a) Reguła 1 jest bardziej specyficzna niż reguła 2.
- (b) Reguła 3 jest bardziej specyficzna niż reguła 1.
- (c) Reguła 2 i reguła 3 są tak samo specyficzne.

24. Następujący program w języku JavaScript

```
var c = (function() {
  var _C = 0;
  function change(p) {
    _C += p;
  }
  return {
    inc: function() { change(2); },
    val: function() { return _C; }
  };
})();
j = c;
console.log(c.val());
c.inc();
console.log(c.val());
c.inc(); j.inc();
console.log(j.val());
```

- (a) wypisze 0 w pierwszym wierszu;
- (b) wypisze 2 w drugim wierszu;
- (c) wypisze 2 w trzecim wierszu.

25. Ruter dostarczony przez dostawcę internetu ma dwa interfejsy Ethernet: zewnętrzny i wewnętrzny. Dostawca internetu przydzielił publiczny adres IP 80.60.70.40, a ruter przeprowadza translację adresów.

Komputer w sieci wewnętrznej o adresie IP 192.168.0.20 wysyła pakiet IP do internetu na adres 8.8.8.8. Wynika z tego, że

- (a) ruter zmieni adres źródłowy tego pakietu podczas przekazywania go do internetu;
- (b) ruter zmieni adres docelowy tego pakietu podczas przekazywania go do internetu;
- (c) docelowy adres sprzętowy ramki ethernetowej wysłanej przez komputer do routera będzie taki sam jak docelowy adres sprzętowy ramki wysłanej przez ruter do jego domyślnej bramy.

26. Poprawnym adresem IP komputera w podsieci 192.168.0.0/20 jest

- (a) 192.168.0.19
- (b) 192.168.0.0
- (c) 192.168.14.255

27. W systemie plików ext2 maksymalny rozmiar

- (a) pliku zależy liniowo od rozmiaru bloku logicznego;
- (b) grupy zależy liniowo od rozmiaru bloku logicznego;
- (c) partycji zależy liniowo od rozmiaru bloku logicznego.

28. Szeregowanie synchroniczne zadań w systemie operacyjnym

- (a) zapobiega marnowaniu czasu procesora;
- (b) wymaga od programisty podziału procesu na zadania o ustalonym maksymalnym czasie wykonania;
- (c) łatwo skaluje się na dowolną liczbę procesów.

29. Plik `file.txt` zawiera kolejne litery alfabetu. W wyniku wykonania programu w języku C

```
1 #include <fcntl.h>
2 #include <unistd.h>
3 #include <sys/wait.h>
4
5 int main ()
6 {
7     pid_t pid; int i; char buf[1];
8
9     for (i = 1; i <= 5; i++) {
10        switch (pid = fork()) {
11            case -1:
12                return -1;
13
14            case 0:
15                fd = open("file.txt", O_RDWR);
16                read(fd, buf, sizeof(buf));
17                break;
18
19            default:
20                wait(0);
21                return 0;
22        }
23    }
24    return 0;
25 }
```

- (a) powstanie 10 procesów potomnych;
- (b) każdy z procesów wczyta z pliku inną literę;
- (c) każdy z procesów potomnych będzie miał taką samą liczbę otwartych deskryptorów.

30. Algorytm uwierzytelniania wiadomości HMAC do obliczenia wyniku używa zawsze

- (a) pewnej dodatkowej funkcji skrótu kryptograficznego;
- (b) funkcji SHA-256;
- (c) wspólnego sekretu (klucza).