Najmocniejsze twierdzenie stereometrii – zadania

1. (RUS 2003) Sfera wpisana w czworościan $ABCD$ jest styczna do ściany ABC w punkcie P, a sfera dopisana do czworościanu $ABCD$ jest styczna do ściany ABC w punkcie Q. Dowieść, że $\angle BAP = \angle CAQ$.

2. (OM 59-I-8) Dany jest ostrosłup czworokątny $ABCDS$ o podstawie czworokąta wypukłego $ABCD$. Sfera wpisana w ten ostrosłup jest styczna do ściany $ABCD$ w punkcie P. Dowieść, że $\angle APB + \angle CPD = 180°$.

3. (OM 26-II-5) Dowieść, że jeśli w wielościan wypukły można wpisać kulę i każdą scianę tego wielościanu pomalować na jeden z dwóch kolorów tak, że każde dwie ściany mające wspólną krawędź są różnych kolorów, to suma pól jednego koloru jest równa sumie pól drugiego koloru.

4. (RUS 1986) Czworościan $ABXY$ jest opisany na sferze. Punkty A i B są ustalone, a punkty X i Y poruszają się. Udowodnić, że suma $\angle AXB + \angle XBY + \angle BYA + \angle YAX$ jest stała.

5. Wykazać, że dla czworościanu $ABCD$ następujące warunki są równoważne:

a) sfera wpisana jest styczna do ściany ABC w środku okręgu wpisanego,

b) sfera dopisana jest styczna do ściany ABC w środku okręgu wpisanego,

c) $\angle ABD = \angle CBD$, $\angle BCD = \angle ACD$, $\angle CAD = \angle BAD$.

6. (KLUB 44 - 574) W pewnym czworościanie wszystkie sfery dopisane są styczne do ścian czworościanu w środkach okręgów wpisanych w te ściany. Udowodnić, że czworościan ten jest foremny.

7. (RUS 1997) Sfera wpisana w czworościan jest styczna do jednej ze ścian w środku okręgu wpisanego w nią, do drugiej w jej ortocentrum, a do trzeciej w jej środku ciężkości. Dowieść, że czworościan ten jest foremny.

8. Sfera wpisana w czworościan jest styczna do jednej ze ścian w jej ortocentrum, do drugiej w jej środku ciężkości, a do trzeciej w punkcie Torricellego. Dowieść, że czworościan ten jest foremny.
Uwaga: Punkt T, leżący wewnątrz trójkąta ABC, jest punktem Torriciellego trójkąta ABC, jeśli $\angle ATB = \angle BTC = \angle CTA = 120°$.

9. (OM 57-III-5) Dany jest czworościan $ABCD$, w którym $AB = CD$. Sfera wpisana w ten czworościan jest styczna do ścian ABC i ABD odpowiednio w punktach K i L. Dowieść, że jeżeli punkty K i L są środkami ciężkości ścian ABC i ABD, to czworościan $ABCD$ jest foremny.

10. (USA 1980) Sfera wpisana w czworościan jest styczna do każdej ze ścian w środku ciężkości. Dowieść, że czworościan ten jest foremny.

11. (BUL 1981) Sfera wpisana w czworościan jest styczna do trzech ścian w ortocentrach. Dowieść, że czworościan ten jest foremny.

Rozwiązania

1. (RUS 2003) *Sfera wpisana w czworościan $ABCD$ jest styczna do ściany ABC w punkcie P, a sfera dopisana do czworościanu $ABCD$ jest styczna do ściany ABC w punkcie Q. Dowieść, że $\angle BAP = \angle CAQ$.*

Rozwiązanie. Niech K i L będą punktami styczności sfery wpisanej w czworościan $ABCD$ odpowiednio do ścian ABD i ACD, a M i N będą punktami styczności sfery dopisanej stycznej do ściany ABC odpowiednio z płaszczyznami ABD i ACD. Trójkąty AKM i ALN są przystające, skąd wynika, że $\angle KAM = \angle LAN$. Z przystawania par trójkątów BAP i BAK, BAQ i BAM, CAP i CAL, CAQ i CAN otrzymamy kolejno, że

$$\angle BAP = \angle BAK, \quad \angle BAQ = \angle BAM, \quad \angle CAP = \angle CAL, \quad \angle CAQ = \angle CAN.$$

W takim razie

$$\angle BAP + \angle BAQ = \angle KAM = \angle LAN = \angle CAP + \angle CAQ.$$

To w połączeniu z

$$\angle BAP + \angle CAP = \angle CAB = \angle BAQ + \angle CAQ$$

daje równość $\angle BAP = \angle CAQ$.

Uwaga. Prawdziwe są też równości $\angle ABP = \angle CBQ$ i $\angle ACP = \angle BCQ$. Punkty P i Q są więc punktami izogonalnymi w trójkącie ABC. Najsłynniejsza para punktów izogonalnych to środek okręgu opisanego i ortocentrum (przykład 2 w artykule był więc szczególnym przypadkiem tego zadania).

2. (OM 59-I-8) *Dany jest ostrosłup czworokątny $ABCDS$ o podstawie czworokąta wypukłego $ABCD$. Sfera wpisana w ten ostrosłup jest styczna do ściany $ABCD$ w punkcie P. Dowieść, że $\angle APB + \angle CPD = 180°$.*

Rozwiązanie. Niech K, L, M, N będą punktami styczności sfery wpisanej w dany ostrosłup odpowiednio ze ścianami ABS, BCS, CDS, DAS. Zachodzą równości $\angle AKS = \angle ANS$, $\angle BLS = \angle BKS$, $\angle CMS = \angle CLS$, $\angle DNS = \angle DLS$ oraz $\angle APB = \angle AKB$, $\angle BPC = \angle BLC$, $\angle CPD = \angle CMD$, $\angle DPA = \angle DMA$. Korzystając z tego, że sumy kątów płaskich o wierzchołkach w punktach K, L, M, N wynoszą po $360°$ otrzymamy $\angle APB + \angle CPD = \angle BPC + \angle APD$, skąd $\angle APB + \angle CPD = 180°$.

3. (OM 26-II-5) *Dowieść, że jeśli w wielościan wypukły można wpisać kulę i każdą ścianę tego wielościanu pomalować na jeden z dwóch kolorów tak, że każde dwie ściany mające wspólną krawędź są różnych kolorów, to suma pól jednego koloru jest równa sumie pól drugiego koloru.*

Rozwiązanie. Przyjmijmy dla wygody, że wielościan pomalowano na biało i czarno. Rozpatrzmy dowolną krawędź AB i przyjmijmy, że dwie ściany schodzące się w tej krawędzi są styczne do kuli wpisanej w punktach P i Q. Trójkąty ABP i ABQ są przystające - mają więc równe pola. Z drugiej strony trójkąty te leżą na sąsiadujących ścianach, a więc są pomalowane na dwa różne kolory (jeden z nich nazwijmy białym, a drugi czarnym). W takim razie suma pól ścian białych jest równa sumie pól trójkątów białych (po wszystkich krawędziach), co jest z kolei równe sumie pól trójkątów czarnych (też po wszystkich krawędziach), a to jest równe sumie pól ścian czarnych.

4. (RUS 1986) *Czworościan $ABXY$ jest opisany na sferze. Punkty A i B są ustalone, a punkty X i Y poruszają się. Udowodnić, że suma $\angle AXB + \angle XBY + \angle BYA + \angle YAX$ jest stała.*

Rozwiązanie. Niech P, Q, R, S będą punktami styczności sfery wpisanej w czworościan $ABXY$ odpowiednio do ścian ABX, ABY, BXY, AXY. Mamy

$$\angle AYB + \angle YBX + \angle BXA + \angle XAY = \angle AYB + \angle RBY + \angle RBX + \angle BXA + \angle SAX + \angle SAY =$$

$$= \angle AYB + \angle QBY + \angle PBX + \angle BXA + \angle XAP + \angle YAQ =$$

$$= 180° - \angle QBA - \angle QAB + 180° - \angle PAB - \angle PBA = \angle APB + \angle AQB.$$

Ostatnia wielkość nie zależy od punktów X i Y, co dowodzi tezy.

5. *Wykazać, że dla czworościanu $ABCD$ następujące warunki są równoważne:*

a) sfera wpisana jest styczna do ściany ABC w środku okręgu wpisanego,

b) sfera dopisana jest styczna do ściany ABC w środku okręgu wpisanego,

c) $\angle ABD = \angle CBD$, $\angle BCD = \angle ACD$, $\angle CAD = \angle BAD$.

Rozwiązanie. a)$\Leftrightarrow$ c)
Niech I, K, L będą punktami styczności sfery wpisanej w czworościan $ABCD$ odpowiednio ze ścianami ABC, BCD, ABD. Zauważmy, że

$$\angle ABI = \angle ABL, \quad \angle CBI = \angle CBK, \quad \angle BKD = \angle BLD.$$

Mamy

$$\angle ABI = \angle CBI \Leftrightarrow \angle ABL = \angle CBK \Leftrightarrow \angle ABL + \angle DBL = \angle CBK + \angle DBK \Leftrightarrow \angle ABD = \angle CBD.$$

Przeprowadzając to samo rozumowanie dla punktów A i C dostaniemy a) $\Leftrightarrow$ c).
b)$\Leftrightarrow$ c)
Niech I, M, N będą punktami styczności sfery dopisanej do czworościanu $ABCD$ odpowiednio ze ścianą ABC i płaszczyznami BCD, ABD. Zauważmy, że

$$\angle ABI = \angle ABN, \quad \angle CBI = \angle CBM, \quad \angle BMD = \angle BND.$$

Mamy

$$\angle ABI = \angle CBI \Leftrightarrow \angle ABN = \angle CBM \Leftrightarrow \angle ABN + \angle DBN = \angle CBM + \angle DBM \Leftrightarrow \angle ABD = \angle CBD.$$

Przeprowadzając to samo rozumowanie dla punktów A i C dostaniemy b) $\Leftrightarrow$ c).

6. (KLUB 44 - 574) *W pewnym czworościanie wszystkie sfery dopisane są styczne do ścian czworościanu w środkach okręgów wpisanych w te ściany. Udowodnić, że czworościan ten jest foremny.*

Rozwiązanie. Korzystając z poprzedniego zadania dla sfer stycznych do ścian ABC i BCD dopisanych do czworościanu $ABCD$ otrzymamy, że wszystkie kąty płaskie przy wierzchołku B mają równą miarę - β. To samo stwierdzimy dla wierzchołków A, C, D - oznaczmy wspólne miary odpowiednio przez α, γ, δ. Patrząc na sumy kątów w trójkątach ABC i ABD dostaniemy $\gamma = \delta$. Analogicznie udowodnimy, że $\alpha = \beta = \gamma = \delta$, co w połączeniu z $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$ oznacza, że wszystkie kąty płaskie czworościanu są równe 60°.

7. (RUS 1997) *Sfera wpisana w czworościan jest styczna do jednej ze ścian w środku okręgu wpisanego w nią, do drugiej w jej ortocentrum, a do trzeciej w jej środku ciężkości. Dowieść, że czworościan ten jest foremny.*

Rozwiązanie. Przyjmijmy, że sfera wpisana w czworościan $ABCD$ jest styczna do ściany ABC w środku okręgu wpisanego I, do ściany BCD w ortocentrum H, a do ściany ACD w środku ciężkości G.

W takim razie $\angle BAI = \angle CAI = \alpha$, $\angle ABI = \angle CBI = \beta$, $\angle BCI = \angle ACI = \gamma$. Z przystawania trójkątów BIC i BHC wynika teraz, ze $\angle CBH = \beta$ i $\angle BCH = \gamma$. Skoro punkt H jest ortocentrum trójkąta BCD, to $\angle CDH = \angle CBH = \beta$, $\angle BDH = \angle BCH = \gamma$ oraz $\angle DBH = \angle DCH = \alpha$.

Trójkąty AIC i AGC są przystające, skąd $\angle CAG = \angle CAI = \alpha$ i $\angle ACG = \angle ACI = \gamma$. Przystawanie trójkątów CGD i CHD pozwala zaś napisać, że $\angle DCG = \angle DCH = \alpha$ oraz $\angle CDG = \angle CDH = \beta$. Przyjmując, że X jest środkiem krawędzi AC stwierdzamy, że $\angle DXC = 90^\circ$ (gdyż $\angle XCD + \angle XDC = \beta + \alpha + \gamma = 90^\circ$). Prosta DX jest więc osią symetrii trójkąta ADC, skąd natychmiast wynika, że

$$\angle ADG = \angle CDG = \beta, \quad \angle DAG = \angle DCG = \alpha \quad \text{oraz} \quad \alpha = \gamma.$$

Punkt G jest więc jednocześnie środkiem ciężkości i okręgu wpisanego w trójkąt ACD, skąd natychmiast wynika, że

$$\alpha = \beta = \gamma = 30^\circ.$$

Stąd otrzymujemy, że trójkąty ABC, BCD, ACD są równoboczne, a więc czworościan $ABCD$ jest foremny.

8. *Sfera wpisana w czworościan jest styczna do jednej ze ścian w jej ortocentrum, do drugiej w jej środku ciężkości, a do trzeciej w punkcie Torricellego. Dowieść, że czworościan ten jest foremny.*
Uwaga: Punkt T, leżący wewnątrz trójkąta ABC, jest punktem Torriciellego, jeśli $\angle ATB = \angle BTC = \angle CTA = 120°$.

Rozwiązanie. Przyjmijmy, że sfera wpisana w czworościan $ABCD$ jest styczna do ściany ABC w punkcie Torriciellego T, do ściany BCD w ortocentrum H, a do ściany ACD w środku ciężkości G.

Otrzymujemy więc $\angle BHC = \angle BHD = \angle CHD = 120°$, skąd natychmiast wynika, że $\angle BDC = \angle BCD = \angle CBD = 60°$, a więc trójkąt BCD jest równoboczny.

Analogicznie dostaniemy $\angle AGC = \angle AGD = \angle CGD = 120°$. Niech X będzie środkiem krawędzi AC. Mamy $\angle AGX = 60° = \angle CGX$. Prosta GX jest więc jednocześnie środkową i dwusieczną w trójkącie AGC. W takim razie $AG = CG$ i $GX \perp AC$. Stąd $AD = CD$. Podobnie pokażemy, że $AD = AC$ i w konsekwencji trójkąt ACD jest równoboczny.

Zatem $AC = BC$ i $\angle ACB = \angle ACT + \angle BCT = \angle ACG + \angle BCH = 30° + 30° = 60°$. Trójkąt ABC jest więc również równoboczny. W takim razie czworościan $ABCD$ jest foremny.

9. (OM 57-III-5) *Dany jest czworościan $ABCD$, w którym $AB = CD$. Sfera wpisana w ten czworościan jest styczna do ścian ABC i ABD odpowiednio w punktach K i L. Dowieść, że jeżeli punkty K i L są środkami ciężkości ścian ABC i ABD, to czworościan $ABCD$ jest foremny.*

Rozwiązanie. Oznaczmy przez s sferę wpisaną w czworościan $ABCD$. Rozpoczniemy od wykazania, że trójkąty ABC i ABD są przystające.

Niech E będzie środkiem krawędzi AB. Ponieważ K i L są punktami styczności sfery s do czworościanu $ABCD$, to $AK = AL$ i $BK = BL$, skąd wynika, że trójkąty AKB i ALB są przystające. Ich środkowe KE i LE mają jednakową długość, skąd $CE = 3 \cdot KE = 3 \cdot LE = DE$. Ale

$$\angle CEB = \angle KEB = \angle LEB = \angle DEB,$$

więc trójkąty BEC i BED są przystające.

Analogicznie dowodzimy, że trójkąty AEC i AED są przystające. Zatem trójkąty ABC i ABD są przystające.

Stąd i z przykładu 1 (patrz artykuł) otrzymujemy $\angle BKC = \angle BLD = \angle AKC$. To zaś oznacza, że odcinek KE jest jednocześnie środkową i dwusieczną w trójkącie AKB, więc $KE \perp AB$. Trójkąty ABC i ABD są zatem równoramienne. Stąd $AC = BC = AD = BD$.

Dalej rozumowanie poprowadzimy dwoma sposobami.

Sposób I

Uwzględniając warunek $AB = CD$ stwierdzamy, że trójkąty ABC i CBD są przystające, skąd $\angle CBD = \angle ACB$. Niech M będzie punktem styczności sfery s ze ścianą BCD. Wtedy $\angle CBM = \angle CBK$ oraz $\angle DBM = \angle DBL = \angle CBK$. W takim razie $\angle BCK = \frac{1}{2}\angle ACB = \frac{1}{2}\angle CBD = \angle CBM = \angle CBK$. Zatem $BK = CK$, skąd również $AB = AC$. To kończy dowód.

Sposób II

Uwzględniając warunek $AB = CD$ stwierdzamy, że trójkąty ABC i DBC są przystające. Oznaczając przez P i Q środki krawędzi BC i AD dostajemy stąd $AP = DP$. To oznacza, że $PQ \perp AD$. Analogicznie udowodnimy, że $PQ \perp BC$.

Rozpatrzmy przekształcenie będące obrotem o kąt 180° wokól prostej PQ. W wyniku tego przekształcenia czworościan $ABCD$ przechodzi na siebie, a więc sfera s też musi przejść na siebie. Ponadto ściany ABC i ABD przechodzą odpowiednio na ściany DCB i DCA, a zatem środki ciężkości ścian DCB i DCA pokrywają się z punktami styczności sfery s do ścian DCB i DCA.

Analogicznie jak wyżej wykazujemy, że $AB = BD = DC = CA$, skąd wnioskujemy, że wszystkie krawędzie czworościanu $ABCD$ są równej długości. To oznacza, że czworościan $ABCD$ jest foremny.

10. (USA 1980) *Sfera wpisana w czworościan jest styczna do każdej ze ścian w środku ciężkości. Dowieść, że czworościan ten jest foremny.*

Rozwiązanie. Tak jak w poprzednim zadaniu, dowodzimy, że jeśli sfera wpisana w czworościan $ABCD$ jest styczna do ścian ABC i ABD w środkach ciężkości, to $AC = BC = AD = BD$. Robiąc to samo dla trójkątów ABC i BCD dostaniemy $AB = AC = BD = CD$, skąd bezpośrednio wynika teza.

11. (BUL 1981) *Sfera wpisana w czworościan jest styczna do trzech ścian w ortocentrach. Dowieść, że czworościan ten jest foremny.*

Rozwiązanie. Załóżmy, że sfera wpisana w czworościan $ABCD$ jest styczna do ścian ABC i ABD odpowiednio w punktach K i L, które są ortocentrami tych ścian. Wykażemy, że $AC = AD = BC = BD$.

Trójkąty AKB i ALB są przystające. Niech K' i L' będą odpowiednio punktami przecięcia się prostych AK z BC i AL z BD. Wtedy

$$\angle ABC = \angle ABK' = \angle ABL' = \angle ABD.$$

Analogicznie $\angle BAC = \angle BAD$. Trójkąty ABC i ABD są więc przystające. Korzystając teraz z przykładu 1 (patrz artykuł) dostaniemy

$$\angle ABC = 180^\circ - \angle AKC = 180^\circ - \angle BLC = \angle BAD = \angle BAC.$$

Zatem trójkąty ABC i ABD są trójkątami przystającymi równoramiennymi. Stąd $AC = AD = BC = BD$.

Przyjmijmy bez straty dla ogólności, że sfera wpisana jest też styczna do ściany BCD w ortocentrum. Przeprowadzając analogiczne rozumowanie jak poprzednio dostaniemy $AB = BD = AC = CD$, skąd wraz z poprzednią równością wynika teza.