# Klub 44

$$\sqrt[\otimes]{\oint!} = 44$$

Termin nadsyłania rozwiązań: 31 V 2010

## Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru $n$ w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie $S$ oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a $N$ – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie http://www.mimuw.edu.pl/delta/regulamin.html.

## Zadania z matematyki nr 597, 598

*Redaguje Marcin E. KUCZMA*

**597.** Znaleźć wszystkie funkcje $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, spełniające równanie

$$f(xf(x) + f(y)) = f(x)^2 + y \qquad \text{dla } x, y \in \mathbb{R}.$$

**598.** Niech $M = \{1, 2, \ldots, m^2\}$ ($m$ jest ustaloną liczbą naturalną).

(a) Ile jest w zbiorze $M$ podzbiorów niezawierających pary liczb, których różnica dzieli się przez $m$?

(b) Ile jest w zbiorze $M$ podzbiorów niezawierających pary liczb, których różnica jest równa $m$?

Zadanie 598 zaproponował pan Paweł Kubit z Krakowa.

## Rozwiązania zadań z numeru 11/2009

Przypominamy treść zadań:

**589.** W każde pole tabelki o wymiarach $n \times n$ wpisujemy dodatnią liczbę całkowitą niewiększą od $n$ tak, by w każdym wierszu oraz w każdej kolumnie wszystkie liczby były równe lub wszystkie liczby były różne. Niech $S$ będzie sumą wszystkich liczb w tabelce. Ile różnych wartości $S$ można w ten sposób uzyskać (dla ustalonego $n$)?

**590.** Dowieść, że dla każdej parzystej liczby naturalnej $n$ oraz dla każdej liczby rzeczywistej $x$ zachodzi nierówność

$$\left(\frac{1+x}{2}\right)^n \leqslant \frac{1+x+\ldots+x^n}{n+1}.$$

**589.** Jeśli w każdym wierszu jest permutacja liczb $1, \ldots, n$, to $S = n \cdot n(n+1)/2$. Gdy w dokładnie jednym wierszu jest ciąg stały $(k, \ldots, k)$, a w każdym z pozostałych wierszy jest permutacja liczb $1, \ldots, n$, wówczas $S = nk + (n-1) \cdot n(n+1)/2$.

Gdy w dwóch wierszach są ciągi stałe $(k, \ldots, k)$, $(l, \ldots, l)$, przy czym $k \neq l$, to w każdej kolumnie musi być permutacja liczb $1, \ldots, n$, i znów $S = n \cdot n(n+1)/2$. Jeśli zaś $k = l$, to w każdej kolumnie musi być ciąg stały $(k, \ldots, k)$, więc $S = n^2 k$.

Reasumując, możliwymi wartościami sumy $S$ są liczby

$$\frac{n^2(n+1)}{2}, \quad nk + \frac{n(n^2-1)}{2}, \quad n^2 k; \quad 1 \leqslant k \leqslant n$$

(i wszystkie one faktycznie mogą być osiągnięte) – razem, a priori, $2n+1$ wartości. Czy jednak są one różne? Możliwe, że (dla pewnych $k, l \leqslant n$) ma miejsce któraś z równości

$$\frac{n^2(n+1)}{2} = nk + \frac{n(n^2-1)}{2}, \tag{1}$$

$$\frac{n^2(n+1)}{2} = n^2 k, \tag{2}$$

$$nk + \frac{n(n^2-1)}{2} = n^2 l. \tag{3}$$

Każde z równań (1) i (2) sprowadza się do $2k = n+1$; nie ma więc rozwiązania, gdy $n$ jest liczbą parzystą, ma natomiast dokładnie jedno rozwiązanie $k = (n+1)/2$, gdy $n$ jest liczbą nieparzystą. Równanie (3) przekształcamy do postaci

$$2k - 1 = n(2l - n).$$

I znów: dla $n$ parzystego – brak rozwiązań. Dla $n$ nieparzystego: lewa strona przedstawia liczbę mniejszą niż $2n$, prawa – wielokrotność $n$. Równość zachodzi jedynie, gdy obie strony są równe $n$, czyli dla $k = (n+1)/2 = l$.

Wniosek: gdy $n$ jest liczbą parzystą, wszystkie wyznaczone na początku wartości są różne; suma $S$ może mieć każdą z tych $2n+1$ wartości. Gdy $n$ jest liczbą nieparzystą, wartość $n^2(n+1)/2$ powtarza się trzykrotnie; jest więc $2n-1$ możliwych wartości sumy $S$.

**590.** Zadana nierówność zachodzi dla $x = 1$. Dla $x \neq 1$ przepisujemy ją równoważnie jako

$$\frac{x^{n+1}-1}{x-1} \geqslant (n+1)\left(\frac{x+1}{2}\right)^n, \tag{4}$$

i w tej postaci będziemy jej dowodzić.

Dla każdej pary liczb rzeczywistych $a, b$ ma miejsce równość

$$\begin{aligned}(a+b)^{n+1} - (a-b)^{n+1} &= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} \left(a^{n+1-k} b^k - a^{n+1-k}(-b)^k\right) \\ &= 2 \sum_{k \in K} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k,\end{aligned}$$

gdzie $K = \{1, 3, 5, \ldots, n-1, n+1\}$. Kontynuujemy przekształcenia dla $b \neq 0$:

$$\frac{(a+b)^{n+1} - (a-b)^{n+1}}{2b} = \sum_{k \in K} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^{k-1} \geqslant \geqslant (n+1)a^n; \tag{5}$$

ostatnia nierówność powstała przez odrzucenie z uzyskanej sumy wszystkich składników z wyjątkiem pierwszego – są one liczbami nieujemnymi, bo wykładniki potęg są parzyste.

Podstawiamy teraz w (5) $a = (x+1)/2$, $b = (x-1)/2$ i dostajemy dowodzoną nierówność (4).