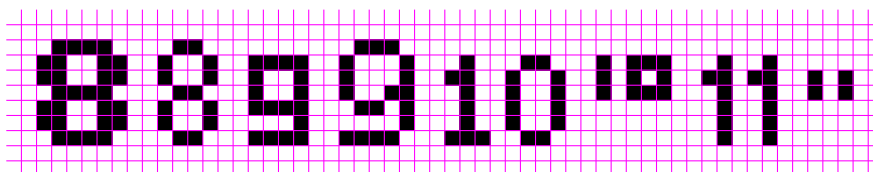


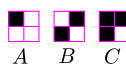
# mała delta

## Policz i oblicz

Weź kartkę w kratkę i zamaluj kilka pól na czarno w ten sposób, by powstała liczba od 8 do 11, na przykład:



Policz, ile razy w Twoim rysunku występuje każdy z następujących układów zamalowanych pól:

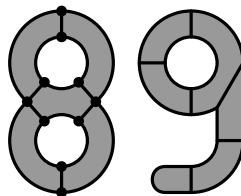


A teraz oblicz wartość  $9 + A - B - C$ .

Na przykład, dla kolejnych liczb z rysunku przykładowego wychodzi:

- pierwsza ósemka:  $9 + 3 - 0 - 4 = 8$
- druga ósemka:  $9 + 3 - 4 - 0 = 8$
- pierwsza dziewiątka:  $9 + 1 - 0 - 1 = 9$
- druga dziewiątka:  $9 + 3 - 3 - 0 = 9$
- pierwsza dziesiątka:  $9 + 3 - 2 - 0 = 10$
- druga dziesiątka:  $9 + 2 - 0 - 1 = 10$
- pierwsza jedenastka:  $9 + 2 - 0 - 0 = 11$
- druga jedenastka:  $9 + 2 - 0 - 0 = 11$

Jeśli sam napiszesz liczbę (od 8 do 11) trochę inaczej niż na przykładowych obrazkach, to również wynikiem powinna być napisana przez Ciebie liczba. Dlaczego?



Podobną sztuczkę można również wykonać, nie używając kartki w kratkę. Na rysunku powyżej widzimy ósemkę. Jest tam  $n = 10$  punktów (wierzchołków) połączonych  $m = 16$  liniami (krawędziami). Spośród powstałych obszarów (ścian)  $f = 5$  jest wypełnionych. Po dodaniu  $9 + n + f - m$  otrzymujemy 8. Analogicznie, dla dziewiątki mamy

$$9 + n + f - m = 9 + 12 + 6 - 18 = 9.$$

Dla jedenastki zrobionej z dwóch patyczków (bez żadnych wypełnionych obszarów) mamy  $9 + 4 + 0 - 2 = 11$ . Po wykonaniu tego obliczenia dla jednej z naszych liczb (od 8 do 11) podzielonej na obszary w inny sposób również w wyniku otrzymamy nią samą. (Jedna uwaga: zaznaczane obszary muszą być takie, że nie można poprowadzić przez nie krawędzi w ten sposób, by obszar nie rozpadł się na dwa mniejsze. Inaczej mówiąc, nie mogą mieć dziur w środku.)

\*   \*   \*

Napisz liczbę od 8 do 11. Oznacz przez  $X$  liczbę cyfr, a przez  $Y$  liczbę dziur w cyfrach. Oblicz  $9 + X - Y$ . Co wychodzi?

Obie powyższe sztuczki polegają właśnie na obliczaniu  $9 + X - Y$ . W przypadku tej drugiej dość łatwo to udowodnić. Najprostszym możliwym rysunkiem jest rysunek pusty, dla którego

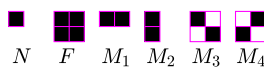
$$n = m = f = X = Y = 0, \quad \text{czyli} \quad X - Y = n + f - m.$$

Bardziej skomplikowane rysunki otrzymujemy przez dodanie nowego wierzchołka ( $n$  i  $X$  zwiększają się o 1), albo dodanie nowej krawędzi ( $m$  zwiększa się o 1; jeśli dwa połączone wierzchołki były już połączone w inny sposób, to tworzy się nowa dziura, w przeciwnym przypadku  $X$  zmniejsza się o 1), albo dodanie nowej ściany ( $f$  się zwiększa, a  $Y$  się zmniejsza o 1). Każda z tych operacji zachowuje równość  $X - Y = n + f - m$ , więc skoro zachodziła ona na początku, to będzie również zachodziła na końcu.

Pierwsza sztuczka opiera się na tym samym. Zamiast obliczać układy  $A, B, C$  pokazane wyżej, można też obliczać

$$9 + N + F - M_1 - M_2 - M_3 - M_4,$$

gdzie  $N, F, M_i$  oznaczają, ile razy na naszym rysunku występują następujące układy:



Po zastanowieniu można zauważyć, że  $N$  to w zasadzie liczba wierzchołków,  $F$  — liczba ścian, a  $M_i$  to liczba krawędzi idących w jednym z kierunków. Pokazanie, że oba wzory liczą w zasadzie to samo, zostawiamy Czytelnikowi.

\*   \*   \*

Wartość

$$X - Y = n + f - m$$

dla danego rysunku nazywamy jego *charakterystyką Eulera*; jest ona ważnym *niezmiennikiem topologicznym*, czyli wielkością niezmienną się przy tzw. homeomorfizmach (intuicyjnie mówiąc — przekształceniach, które mogą zmieniać kształt i wielkość, ale nic nie rozrywają ani nie sklejają). Można ją policzyć nie tylko dla obszarów na płaszczyźnie — na przykład, dla dowolnego wielościanu wypukłego jeśli  $n$  jest liczbą wierzchołków,  $m$  — liczbą krawędzi,  $f$  — liczbą ścian, to zachodzi ładny wzór

$$n + f = 2 + m.$$

Dzieje się tak dlatego, że charakterystyką Eulera sfery (topologicznie równoważnej z powierzchnią wielościanu) jest 2. Charakterystyka Eulera jest określona również w podobny sposób dla obiektów mających więcej wymiarów niż 2.

*Małą Deltę przygotował Eryk KOPCZYŃSKI*