

Zadanie 2. Rozstrzygnąć, czy istnieje liczba pierwsza p oraz liczby całkowite nieujemne x, y, z spełniające równanie

$$(12x + 5)(12y + 7) = p^z.$$

Rozwiązanie.

(autor: Kamil Sadkowski)

Załóżmy, że dane równanie ma rozwiązanie. Ponieważ każda z liczb $(12x + 5)$ oraz $(12y + 7)$ jest większa od 1, więc istnieje $k \in \{1, 2, \dots, z - 1\}$ takie, że

$$12x + 5 = p^k \quad \text{oraz} \quad 12y + 7 = p^{z-k}.$$

Zatem

$$(12x + 5)^{z-k} = (12y + 7)^k. \tag{1}$$

Zauważmy, że

$$\begin{aligned} (12x + 5)^{2n} &\equiv 1 \pmod{12}, & (12x + 5)^{2n+1} &\equiv 5 \pmod{12}, \\ (12y + 7)^{2n} &\equiv 1 \pmod{12}, & (12y + 7)^{2n+1} &\equiv 7 \pmod{12}. \end{aligned}$$

Jeśli zachodzi równość (1), to obie liczby k oraz $z - k$ są parzyste.

Niech s będzie maksymalną liczbą taką, że $2^s \mid k$ oraz $2^s \mid z - k$. Wtedy $k = 2^s \cdot t$ oraz $z - k = 2^s \cdot u$, przy czym co najmniej jedna z liczb t i u jest nieparzysta. Zatem równość (1) przybiera postać

$$(12x + 5)^{2^s \cdot t} = (12y + 7)^{2^s \cdot u},$$

czyli

$$\left((12x + 5)^t\right)^{2^s} = \left((12y + 7)^u\right)^{2^s}.$$

Zatem

$$(12x + 5)^t = (12y + 7)^u,$$

co jest niemożliwe, bo liczby po obu stronach ostatniej równości dają różne reszty z dzielenia przez 12. Otrzymana sprzeczność dowodzi, że nie istnieją liczby spełniające równanie $(12x + 5)(12y + 7) = p^z$.

■

Zadanie 4.
55. OM, zaw. I st.

Dany jest trójkąt ostrokątny ABC . Rozważmy wszystkie takie trójkąty równoboczne XYZ , że punkty A, B, C są odpowiednio punktami wewnętrznymi odcinków YZ, ZX, XY . Dowieść, że środki ciężkości wszystkich rozważanych trójkątów XYZ leżą na jednym okręgu.

Rozwiązanie.

Jeśli trójkąt ABC jest równoboczny, to środki ciężkości rozpatrywanych trójkątów XYZ pokrywają się ze środkiem ABC . Załóżmy teraz, że ABC nie jest równoboczny. Niech P, Q, R będą takimi punktami (P po tej samej stronie prostej BC co A , Q po tej samej stronie prostej CA co B i R po tej samej stronie prostej AB co C), że trójkąty BPC, CQA i ARB są trójkątami równoramionymi o podstawach BC, CA, AB i kątach $30^\circ, 120^\circ, 30^\circ$. Trójkąt ABC nie jest równoboczny, więc punkty P, Q i R są parami różne. Ponadto proste XP, YR, ZQ są środkowymi trójkąta XYZ , więc kąty ostre między nimi są równe 60° i środek ciężkości S trójkąta XYZ jest punktem ich przecięcia. Zatem każdy z kątów wypukłych $\sphericalangle PSQ, \sphericalangle QSR, \sphericalangle RSP$, o ile istnieje (tzn. o ile punkt S nie pokrywa się z którymś z punktów P, Q, R ; taki przypadek nie zmienia dalszego rozumowania), może być równy 60° lub 120° .

Dla każdego z odcinków PQ, QR, RS rozpatrzmy dwa okręgi wyznaczające na cięciwach PQ, QR, RS kąty 60° i 120° . Zbiór możliwych położenia punktu S to punkty wspólne tych trzech par okręgów. Jeśli trójkąt PQR jest równoboczny, to zbiór ten jest sumą okręgu PQR i jego środka. Jeśli nie, to żadne dwa okręgi się nie pokrywają, czyli zbiór ten jest skończony.

Dla każdego z rozważanych trójkątów XYZ punkt X leży na okręgu BPC i jego położenie wyznacza jednoznacznie położenie punktów Y i Z , a więc i środka S . Przy ruchu X po okręgu BPC (i wymuszonym przezeń ruchu Y i Z) położenie S zmienia się w sposób ciągły (nietrudny, ale żmudny dowód pozostawiamy jako ćwiczenie). Zatem albo S należy zawsze do okręgu PQR albo ma położenie stałe. ■

Zadanie 6. Na przyjęciu spotkało się n osób ($n \geq 5$). Wiadomo, że wśród dowolnych trzech osób pewne dwie znają się. Dowieść, że spośród uczestników przyjęcia można wybrać nie mniej niż $n/2$ osób i posadzić przy okrągłym stole tak, aby każdy siedział między dwoma swoimi znajomymi.

55. OM, zaw. II st.

Rozwiązanie.

Możliwe są dwa przypadki:

1. Pewna osoba X ma co najmniej $n/2$ nieznanymych. Zgodnie z założeniem, nieznanymi osoby X znają się wzajemnie i można ich oczywiście posadzić przy okrągłym stole w dowolnym porządku.
2. Każda z osób ma mniej niż $n/2$ nieznanymych, czyli przynajmniej $n/2$ znajomych. W tym przypadku tworzymy kolejkę zaczynając od dowolnej osoby i zgodnie z zasadą, że za ostatnią osobą może stanąć wyłącznie osoba jej znajoma. W pewnym momencie wydłużenie kolejki będzie oczywiście niemożliwe. Oznacza to, że wszyscy znajomi ostatniej osoby, powiedzmy osoby Z , stoją w już kolejce. Niech A będzie osobą znajomą Z , stojącą najbliżej początku kolejki. Usuńmy z kolejki wszystkie osoby stojące przed A . W kolejce pozostanie wtedy więcej niż $n/2$ osób (osoba Z i wszyscy jej znajomi), które usadawiamy przy okrągłym stole w porządku zgodnym z porządkiem kolejki zaczynając do A i kończąc na osobie Z , która będzie siedziała obok A . ■