Zadanie 1. Znaleźć wszystkie pary liczb całkowitych dodatnich x, y spełniających równanie
54. OM, zaw. I st.

$$(x+y)^2 - 2(xy)^2 = 1.$$

Rozwiązanie.
(autor: Krzysztof Kulewski)

Równanie jest symetryczne ze względu na niewiadome x i y. Dla ustalenia uwagi przyjmijmy, że $x \geqslant y$.

Jeżeli $x = y$, to nasze równanie przyjmuje postać $4x^2 - 2x^4 = 1$, czyli $(x^2-1)^2 = \frac{1}{2}$. W tym przypadku nie istnieje rozwiązanie w liczbach całkowitych.

Niech zatem $x > y$. Jeśli $y = 1$, to nasze równanie przyjmuje postać $(x+1)^2 - 2x^2 = 1$, zatem $2x - x^2 = 0$, czyli $x = 2$, gdyż $x > 0$. Para $(2,1)$ jest jednym z rozwiązań równania. Z symetrii wynika, że para $(1,2)$ też jest rozwiązaniem.

Niech teraz $y \geqslant 2$. Zatem $x \geqslant 3$. Wtedy mamy $\dfrac{y}{x} < 1$, więc $\dfrac{y}{x} + 1 < 2 \leqslant y$, czyli $y + x < yx$. Zatem $(x+y)^2 < (xy)^2 < 2(xy)^2 + 1$, a więc w tym przypadku nie ma rozwiązania całkowitego.

Stąd wynika, że jedynymi rozwiązaniami całkowitymi dodatnimi naszego równania są pary $(1,2)$ i $(2,1)$. $\blacksquare$

Zadanie 5. Liczba naturalna n_1 zapisana jest w układzie dziesiętnym za pomocą 333 cyfr, z których żadna nie jest zerem. Dla $i = 1, 2, 3, \ldots, 332$ liczba n_{i+1} powstaje z liczby n_i przez przeniesienie cyfry jedności na początek. Dowieść, że albo wszystkie liczby $n_1, n_2, n_3, \ldots, n_{333}$ są podzielne przez 333, albo żadna z nich.

54. OM, zaw. I st.

Rozwiązanie.

Niech $n_k = (x_{333} \ldots x_3 x_2 x_1)_{10}$, gdzie x_1 jest cyfrą jedności, x_2 cyfrą dziesiątek itd. Wtedy $n_{k+1} = (x_1 x_{333} \ldots x_2)_{10}$.

Oznaczmy

$$s_1 = x_1 + x_4 + x_7 + \ldots + x_{331},$$
$$s_2 = x_2 + x_5 + x_8 + \ldots + x_{332},$$
$$s_3 = x_3 + x_6 + x_9 + \ldots + x_{333}.$$

Ponieważ $1000 \equiv 1 \pmod{37}$, więc $1000^m \equiv 1 \pmod{37}$ dla każdego $m \in \mathbb{N}$. Stąd dostajemy $n_k \equiv s_1 + 10s_2 + 100s_3 \pmod{37}$ oraz $n_{k+1} \equiv s_2 + 10s_3 + 100s_1 \pmod{37}$. Ale $s_2 \equiv 1000s_2 \pmod{37}$, skąd wynika, że

$$n_k \equiv 1000s_1 + 10s_2 + 100s_3 = 10(s_2 + 10s_3 + 100s_1) = 10n_{k+1} \pmod{37}.$$

Jeśli $37 \mid n_k$, to $37 \mid 10n_{k+1}$. Ale $\mathrm{NWD}(37, 10) = 1$, więc $37 \mid n_{k+1}$.

Stąd widzimy, że jeśli n_k jest podzielne przez 333, to także n_{k+1} jest podzielne przez 333 itd. Ponieważ $n_{334} = n_1$, to widzimy, że jeśli jedna z liczb $n_1, n_2, n_3, \ldots, n_{333}$ jest podzielna przez 333, to wszystkie liczby $n_1, n_2, n_3, \ldots, n_{333}$ są podzielne przez 333. $\blacksquare$