Zadanie 1. Rozwiązać w liczbach całkowitych równanie
52. OM, zaw. I st.

$$x^{2000} + 2000^{1999} = x^{1999} + 2000^{2000}.$$

Rozwiązanie.

Def. $f(x) = x^{2000} - x^{1999} = x^{1999}(x-1)$. Nasze równanie ma postać $f(x) = f(2000)$. Oczywiście $x = 2000$ jest rozwiązaniem.

W przedziale $\langle 1, \infty)$ funkcja f jest rosnąca, zatem $x = 2000$ jest jedynym rozwiązaniem dodatnim.

Następnie zauważmy, że $x = 0$ nie jest rozwiązaniem. Szukamy rozwiązań ujemnych.

Niech $x = -n,\ n \geqslant 1$. Przypuśćmy, że x jest rozwiązaniem równania.

$$\begin{aligned}(-n)^{2000} + 2000^{1999} &= (-n)^{1999} + 2000^{2000}\\ n^{2000} + n^{1999} &= 2000^{2000} - 2000^{1999}\\ n^{1999}(n+1) &= 2000^{1999}(2000-1) = 2000^{1999} \cdot 1999.\end{aligned}$$

Zatem $1999 \mid n^{1999}(n+1)$. Ale 1999 jest liczbą pierwszą.

(a) $1999 \mid n$, czyli $n = 1999k$ dla pewnego $k \in \mathbb{N}$. Mamy zatem

$$(1999k)^{1999}(1999k+1) = 2000^{1999} \cdot 1999$$

Jeśli $k \geqslant 2$, to lewa strona powyższej równości jest większa od prawej i mamy sprzeczność.

Jeśli $k = 1$, to

$$\begin{aligned}1999^{1999} \cdot 2000 &= 2000^{1999} \cdot 1999\\ 1999^{1998} &= 2000^{1998}, \text{ sprzeczność.}\end{aligned}$$

(b) $1999 \mid n+1$, czyli $n+1 = 1999k$ dla pewnego $k \in \mathbb{N}$.

$$(1999k-1)^{1999}(1999k) = 2000^{1999} \cdot 1999$$

Jeśli $k \geqslant 2$, to lewa strona powyższej równości jest większa od prawej i mamy sprzeczność.

Dla $k = 1$ zachodzi

$$\begin{aligned}1998^{1999} \cdot 1999 &= 2000^{1999} \cdot 1999\\ 1998^{1999} &= 2000^{1999}, \text{ sprzeczność.}\end{aligned}$$

Zatem jedynym rozwiązaniem jest $x = 2000$. ■

Zadanie 6. Liczby całkowite a, b, x, y spełniają równanie
52. OM, zaw. I st.

$$a + b\sqrt{2001} = (x + y\sqrt{2001})^{2000}.$$

Udowodnić, że $a \geqslant 44b$.

Rozwiązanie.

Najpierw pokażmy przez indukcję, że dla każdego $k \in \mathbb{N}$ istnieją liczby całkowite a_k, b_k takie, że

$$(x + y\sqrt{2001})^k = a_k + b_k\sqrt{2001}.$$

1) Dla $k = 1$ — oczywiste.

2) Załóżmy, że teza jest prawdziwa dla $k > 1$. Udowodnimy, że z tego wynika prawdziwość tezy dla $k + 1$.

$$(x + y\sqrt{2001})^{k+1} = (x + y\sqrt{2001})^k \cdot (x + y\sqrt{2001}) =$$
$$= (a_k + b_k\sqrt{2001}) \cdot (x + y\sqrt{2001}) = \Big(a_k x + b_k y \cdot 2001 + (a_k y + b_k x)\sqrt{2001}\Big),$$

czyli $a_{k+1} = a_k x + 2001 b_k y$, $b_{k+1} = a_k y + b_k x$. Teza jest zatem prawdziwa dla każdego $k \in \mathbb{N}$.

Teraz zauważmy, że jeśli

$$p + q\sqrt{2001} = r + s\sqrt{2001} \quad \text{i} \quad p, q, r, s \in \mathbb{Z},$$

to $p = r$ i $q = s$. To wynika z niewymierności $\sqrt{2001}$ (iloczyn dwóch liczb wymiernych jest wymierny, zaś iloczyn liczby wymiernej i niewymiernej jest niewymierny).

Teraz mamy

$$a + b\sqrt{2001} = (a_{1000} + b_{1000}\sqrt{2001})^2.$$

Niech $c = a_{1000}$ i $d = b_{1000}$. Wówczas

$$a + b\sqrt{2001} = c^2 + 2cd\sqrt{2001} + 2001d^2.$$

Stąd $a = c^2 + 2001d^2$ i $b = 2cd$.

Zatem $a = c^2 + 2001d^2 \geqslant c^2 + 1936d^2 = c^2 + (44d)^2 \geqslant 2 \cdot c \cdot 44d = 44b$. ■