KOLOKWIUM Z TOPOLOGII I ZESTAW **A** 13.12.2011

IMIĘ I NAZWISKO: NR INDEKSU:

25 PUNKTÓW ZA KAŻDE ZADANIE

Każde zadanie proszę rozwiązywać na osobnej kartce. Na każdej kartce proszę napisać swoje imię i nazwisko, numer zadania, literę oznaczającą zestaw oraz numer grupy ćwiczeniowej (lub nazwisko osoby prowadzącej).

---

1. Niech $K = (\{0,1\} \times [0,1]) \cup ([0,1] \times \{0,1\}) \subset \mathbb{R}^2$ będzie brzegiem kwadratu na płaszczyźnie. Oznaczmy odpowiednio przez K_e, K_r, K_k, K_s ten podzbiór z topologią euklidesową, wyznaczoną przez metrykę „rzeka", wyznaczoną przez metrykę „kolejową", podprzestrzeni płaszczyzny z topologią iloczynu kartezjańskiego dwóch prostych z topologią „strzałki" (topologia „strzałki" jest generowana przez bazę złożoną z odcinków $(a,b]$, $a,b \in \mathbb{R}, a < b$).

(A) Zbadać własności tych przestrzeni, wypełniając poniższą tabelę - należy postawić w odpowiedniej rubryce T, jeśli zbiór ma daną własność, lub N, jeśli jej nie ma, odpowiedzi nie wymagają uzasadnienia:

Własność	K_e	K_r	K_k	K_s
Zwarta				
Ośrodkowa				
Posiada przeliczalną bazę				
Posiada punkty izolowane				

(B) Które z tych przestrzeni są homeomorficzne, a które nie są? (wstawić T - tak lub N - nie, odpowiedzi nie wymagają uzasadnienia).

Homeomorficzne	K_e	K_r	K_k	K_s
K_e	T			
K_r		T		
K_k			T	
K_s				T

(C) Wskazać wszystkie punkty izolowane w przestrzeni K_s i uzasadnić odpowiedź:

2. Dla punktów $p,\ q \in \mathbb{R}^2$ niech $I(p,q)$ oznacza odcinek domknięty o końcach p, q. Dla $A \subset (0,1]$ niech

$$X(A) = \bigcup\{I((0, \frac{1}{x}), (x, -\frac{1}{x})) :\ x \in A\}.$$

Pokazać, że zwartość podzbioru A odcinka $(0,1]$ z topologią euklidesową jest równoważna zwartości zbioru $X(A)$ na płaszczyźnie euklidesowej i jest równoważna domkniętości zbioru $X(A)$ na płaszczyźnie euklidesowej.

3. Niech $C[0,1]$ będzie przestrzenią funkcji ciągłych $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ z topologią wyznaczoną przez metrykę „supremum":

$$d_{\sup}(f,g) = \sup\{\, |f(x) - g(x)| \ : \ x \in [0,1]\}.$$

Czy odwzorowanie $T : C[0,1] \to \mathbb{R}^2$ dane wzorem $T(f) = (f(0), f(1/2))$ jest:

1. ciągłe?
2. przeprowadza zbiory otwarte na otwarte?
3. przeprowadza zbiory domknięte na domknięte?

Odpowiedzi należy uzasadnić.

4. Niech (X,d) będzie przestrzenią metryczną, a $A, B \subset X$ jej podzbiorami takimi, że $X = A \cup B$ oraz podprzestrzenie $(A, d_{|A\times A})$, $(B, d_{|B\times B})$ są zupełne. Wykazać, że przestrzeń (X,d) jest zupełna.