TEMAT (A).

Każde zadanie proszę rozwiązać na osobnej kartce. Na każdej kartce proszę napisać imię i nazwisko, numer tematu, numer zadania i nazwisko osoby prowadzącej ćwiczenia.

ODPOWIEDZI NALEŻY UZASADNIĆ. KAŻDE ZADANIE 25 PUNKTÓW.

Metryki "kolejowa" d_k i "rzeka" d_r w $\mathbb{R}^2$ określone są następującymi formułami, gdzie $\mathbf{0} = (0,0)$, $p(x,y) = (x,0)$, oraz d_e oznacza metrykę euklidesową w $\mathbb{R}^2$:

$$d_k(a,b) = \begin{cases} d_e(a,b), & \text{jeśli } a, b \text{ i } \mathbf{0} \text{ leżą na jednej prostej,} \\ d_e(a,\mathbf{0}) + d_e(b,\mathbf{0}), & \text{w przeciwnym razie,} \end{cases}$$

$$d_r(a,b) = \begin{cases} d_e(a,b), & \text{jeśli } p(a) = p(b), \\ d_e(a,p(a)) + d_e(p(a),p(b)) + d_e(b,p(b)), & \text{jeśli } p(a) \neq p(b). \end{cases}$$

Zad.1. Dane są następujące podprzestrzenie Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 płaszczyzny z metryką euklidesową:

$$Y_1 = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{(-n,1)\} \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} (\{n\} \times [0,+\infty)), \qquad Y_2 = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{(-\frac{1}{n},1)\} \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\{\frac{1}{n}\} \times [0,1)\right),$$

$$Y_3 = Y_2 \cup \{(0,1)\}, \qquad Y_4 = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{(-\frac{1}{n},1)\} \cup (\{0\} \times [0,1]) \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\{\frac{1}{n}\} \times [0,1]\right).$$

(a) Zbadać zwartość i zupełność tych przestrzeni.
(b) Wyjaśnić, dla jakich i, j przestrzeń Y_i jest homeomorficzna z przestrzenią Y_j.

Zad.2. Niech $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ będzie przekształceniem płaszczyzny z metryką "kolejową" $(\mathbb{R}^2, d_k)$ w płaszczyznę z metryką "rzeka" $(\mathbb{R}^2, d_r)$ określonym formułą

$$f(x,y) = (x-1, 1).$$

Znaleźć zbiór punktów ciągłości przekształcenia f.

Zad.3. Dla punktów $p, q \in R^3$ niech $I(p,q)$ oznacza odcinek domknięty o końcach p i q. Dla $A \subset (0,1) \subset \mathbb{R}$ rozpatrzmy następujący podzbiór przestrzeni R^3 z metryką euklidesową:

$$X(A) = \bigcup \{I((x,0,\mathrm{tg} x)), (x,x^3,0)) : x \in A\}.$$

Pokazać, że podprzestrzeń $X(A)$ przestrzeni euklidesowej R^3 jest zwarta wtedy i tylko wtedy, gdy zbiór A jest zwarty.

Zad.4. Niech (X,d) będzie zupełną przestrzenią metryczną i niech $f : X \to \mathbb{R}^2$ będzie funkcją ciągłą taką, że obraz żadnego zbioru otwartego w X nie jest zawarty w żadnej prostej euklidesowej leżącej na płaszczyźnie. Wykazać, że istnieje $x \in X$ takie, że obie współrzędne punktu $f(x)$ są niewymierne.