Kolokwium z topologii, Potok II, 04.12.2008

Każde zadanie proszę rozwiązać na osobnej kartce. Na każdej kartce proszę napisać imię i nazwisko, numer tematu, numer zadania i nazwisko osoby prowadzącej ćwiczenia.

ODPOWIEDZI NALEŻY UZASADNIĆ. KAŻDE ZADANIE 25 PUNKTÓW.

Metryki "kolejowa" d_k i "rzeka" d_r w $\mathbb{R}^2$ określone są następującymi formułami, gdzie $\mathbf{0} = (0,0)$, $p(x,y) = (x,0)$, oraz d_e oznacza metrykę euklidesową w $\mathbb{R}^2$:

$$d_k(a,b) = \begin{cases} d_e(a,b), & \text{jeśli } a, b \text{ i } \mathbf{0} \text{ leżą na jednej prostej,} \\ d_e(a,\mathbf{0}) + d_e(b,\mathbf{0}), & \text{w przeciwnym razie,} \end{cases}$$

$$d_r(a,b) = \begin{cases} d_e(a,b), & \text{jeśli } p(a) = p(b), \\ d_e(a,p(a)) + d_e(p(a),p(b)) + d_e(b,p(b)), & \text{jeśli } p(a) \neq p(b). \end{cases}$$

Zad.1. Dane są następujące podprzestrzenie X_1, X_2, X_3, X_4 płaszczyzny z metryką euklidesową:

$$X_1 = \{(0,0)\} \cup \bigcup_{n=2}^{\infty} \{1-\frac{1}{n}\} \times [0, 1-\frac{1}{n}],$$

$$X_2 = \{(0,0)\} \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} \{\frac{1}{n}\} \times [0, \frac{1}{n}], \qquad X_3 = \{(0,0)\} \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} \{n\} \times [0,n],$$

$$X_4 = \bigcup \{ \{q\} \times [0,q] : \ q \text{ jest liczbą wymierną z przedziału } [0,1] \ \}.$$

(a) Zbadać zwartość i zupełność tych przestrzeni.
(b) Wyjaśnić, dla jakich i, j przestrzeń X_i jest homeomorficzna z przestrzenią X_j.

Zad.2. Niech $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ będzie określone formułą

$$f(x,y) = (x+1, y+1).$$

Znaleźć zbiór punktów ciągłości f jako przekształcenia z $(\mathbb{R}^2, d_k)$ w $(\mathbb{R}^2, d_r)$.

Zad.3. Dla punktów $p, q \in R^2$ niech $I(p,q)$ oznacza odcinek domknięty o końcach p i q. Dla $A \subset [1, +\infty)$ rozpatrzmy następujący podzbiór płaszczyzny

$$X(A) = \bigcup \{ I((x,x^2),(x^4,0)) : x \in A \}.$$

Pokazać, że podprzestrzeń $X(A)$ płaszczyzny euklidesowej jest zwarta wtedy i tylko wtedy, gdy zbiór A jest zwarty.

Zad.4. Niech $\pi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ będzie rzutem płaszczyzny euklidesowej na pierwszą oś, $\pi(x,y) = x$ i niech $A \subset \mathbb{R}^2$ będzie zbiorem domkniętym takim, że dla każdego domkniętego na płaszczyźnie zbioru $F \subset A$ zbiór $\pi(F)$ jest domknięty na prostej. Pokazać, że dla każdej liczby rzeczywistej $c > 0$ zbiór $\{t \in [-c,c] : \text{ zbiór } \pi^{-1}(t) \cap A \text{ nie jest zwarty}\}$ jest skończony.