

Egzamin z Topologii, Temat B

1 marca 2008

Każde zadanie 1 - 2 powinno być rozwiązane na oddzielnej kartce. Wszystkie odpowiedzi należy uzasadnić. Na każdej kartce z rozwiązaniem powinno być:

- imię i nazwisko osoby zdającej oraz jej numer indeksu,
- litera - nazwa rozwiązywanego tematu,
- numer rozwiązywanego zadania

Prosimy także o podpisanie drugiej strony tej kartki i zamieszczenie na niej rozwiązania sformułowanego tam Zadania 3.

Zadanie 1

Dla $a, b \in \mathbb{R}^2$ niech $I(a, b)$ oznacza odcinek domknięty o końcach a, b i niech

$$I(A, B) = \bigcup \{I(a, b) : a \in A, b \in B\}$$

dla podzbiorów A, B płaszczyzny. Wykazać, że jeśli A i B są niepuste, $A \subset (0, \infty) \times \{0\}$ leży na osi x , a $B \subset \{0\} \times (0, 2008)$ leży na osi y , to $I(A, B)$ z metryką euklidesową jest zupełna wtedy i tylko wtedy, gdy A i B są zwarte.

Zadanie 2

Niech X będzie podprzestrzenią płaszczyzny euklidesowej \mathbb{R}^2 opisaną formułą:

$$X = (\{0\} \times [-1, 1]) \cup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{n} \right\} \times [-1, 0] \right) \cup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} [0, a_n] \times \left\{ \frac{1}{n} \right\} \right),$$

gdzie $a_n > 0$.

- Wykazać, że dla $a_n = 1 - \frac{1}{n+1}$, przestrzeń X jest spójna, ale nie jest zwarta.
- Czy istnieje ciąg liczb dodatnich a_n taki, że X jest jednocześnie spójna i zwarta? Uzasadnić odpowiedź.

Odwróć kartkę

Imię i nazwisko

Numer albumu.....

Zadanie 3

Sprawdzić czy następujące podprzestrzenie przestrzeni metrycznej X

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 2\}, \text{ gdzie } X = \mathbb{R}^3 \text{ z metryką euklidesową}$$

$$B = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = \frac{1}{n}x^2\}, \text{ gdzie } X = \mathbb{R}^2 \text{ z metryką euklidesową,}$$

$$C = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = \operatorname{ctg} x, x \neq k\pi, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\},$$

gdzie $X = \mathbb{R}^2$ z metryką euklidesową,

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}, \text{ gdzie } X = \mathbb{R}^2 \text{ z metryką kolejową,}$$

mają poniższe własności i wypełnić tabelkę, wpisując w odpowiednie miejsca **T**(ak) lub **N**(ie). Nie oczekujemy wyjaśnień.

	A	B	C	D
otwarta w X				
domknięta w X				
gęsta w X				
brzegowa w X				
spójna				
ściągalna				
zwarta				
zupełna				