

Topologia, Egzamin, Temat A

1 luty 2008

Każde zadanie 1 - 3 powinno być rozwiązane na oddzielnej kartce. Wszystkie odpowiedzi należy uzasadnić. Na każdej kartce z rozwiązaniem powinno być:

- imię i nazwisko osoby zdającej oraz jej numer indeksu,
- litera - nazwa rozwiązywanego tematu,
- numer rozwiązywanego zadania

Prosimy także o podpisanie drugiej strony tej kartki i zamieszczenie na niej rozwiązania sformułowanego tam Zadania 4.

Zadanie 1

Niech A będzie domkniętym podzbiorem prostej euklidesowej \mathbb{R} . Wykazać, że jeżeli A nie zawiera żadnego niepustego odcinka (a, b) , to $\sin(A) = \{\sin x : x \in A\}$ nie zawiera żadnego niepustego odcinka (c, d) .

Zadanie 2

Rozpatrzmy przestrzeń funkcji ciągłych $C([0, 1])$ z metryką $d_{\text{sup}}(f, g) = \sup_{x \in [0, 1]} |f(x) - g(x)|$. Zbadać czy następujące podzbiory tej przestrzeni metrycznej są spójne:

- (a) $A = \{f \in C([0, 1]) : f(0) \neq 1\}$
- (b) $B = \{f \in C([0, 1]) : f(0) \neq 1 \text{ lub } f(1) \neq 0\}$

Zadanie 3

Rozważmy następującą podprzestrzeń X płaszczyzny euklidesowej \mathbb{R}^2 :

$$X = ([-1, 0] \times [-1, 1]) \cup \{(x, \sin(1/x)) : x \in (0, 1]\}$$

oraz jej podzbiór $A = \{0\} \times [-1, 1]$. Rozstrzygnąć

- (a) czy przestrzeń X jest zwarta i czy jest spójna.
- (b) czy przestrzeń ilorazowa X/A jest zwarta i czy jest łukowo spójna.

Odwróć kartkę

Imię i nazwisko

Numer albumu.....

Zadanie 4

Sprawdzić czy następujące podprzestrzenie przestrzeni metrycznej X

$A = \mathbb{Q} \cap (0, 1)$, gdzie $X = [0, 1]$ z metryką dyskretną,

$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = \operatorname{ctg} x, x \neq k\pi, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$, gdzie $X = \mathbb{R}^2$ z metryką euklidesową,

$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = \sin x \text{ lub } y = -\sin x, x \in \mathbb{R}\}$, gdzie $X = \mathbb{R}^2$ z metryką euklidesową,

$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z^2 \leq x^2 + y^2 \leq 1, z \in [0, 1]\}$, gdzie $X = \mathbb{R}^3$ z metryką euklidesową

mają poniższe własności i wypełnić tabelkę, wpisując w odpowiednie miejsca **T**(ak) lub **N**(ie). Nie oczekujemy wyjaśnień.

	A	B	C	D
otwarta w X				
domknięta w X				
gęsta w X				
brzegowa w X				
spójna				
ściągalna				
zwarta				
zupełna				