Modele Scotta

25 marca 2013

W poprzednim odcinku: Reflexive cpo

The cpo D is *reflexive* iff there are continuous functions

$$F : D \to [D \to D] \text{ and } G : [D \to D] \to D,$$

with $F \circ G = \mathrm{id}_{[D \to D]}$.

Then F must be onto and G is injective.

Reflexive cpo

$$F : D \to [D \to D], \quad G : [D \to D] \to D, \quad F \circ G = \mathrm{id}.$$

Define application as $a \cdot b = F(a)(b)$ so that $G(f) \cdot a = f(a)$.

Define interpretation as

- $[\![x]\!]_v = v(x)$;
- $[\![PQ]\!]_v = [\![P]\!]_v \cdot [\![Q]\!]_v$;
- $[\![\lambda x.P]\!]_v = G(\lambda\!\!\lambda a.[\![P]\!]_{v[x \mapsto a]})$.

Theorem

A reflexive cpo is a lambda-model.

A reflexive cpo: Model $\mathcal{P}_\omega = \langle \mathbf{P}(\mathbb{N}), \subseteq \rangle$

Notation $P_\omega = \mathbf{P}(\mathbb{N})$.

Every set is a directed union of its finite subsets.

Lemma

A function $f : P_\omega \to P_\omega$ is continuous iff

$$f(a) = \bigcup \{ f(e) \mid e \text{ finite and } e \subseteq a \},$$

for all $a \in P_\omega$.

Moral: A continuous function is fully determined by its values on finite arguments.

Encodings in $\mathcal{P}_\omega$

Pairs:

$$(m,n) = \frac{(n+m)(n+m+1)}{2} + m,$$

Finite sets: $e_0 = \varnothing$, and

$$e_n = \{k_0, k_1, \ldots, k_{r-1}\}, \quad \text{for } n = \sum_{i<r} 2^{k_i}.$$

○

$\mathcal{P}_\omega$ is reflexive

$$\begin{aligned} graph(f) &= \{(n,m) \mid m \in f(e_n)\}; \\ fun(a)(x) &= \{m \mid \exists n \in \mathbb{N}(e_n \subseteq x \wedge (n,m) \in a)\}. \end{aligned}$$

Lemma: Functions *graph* and *fun* are continuous, and

$$fun \circ graph = \mathrm{id}_{[P_\omega \to P_\omega]}.$$

Proof: $fun(graph(f))(x) =$
$= \{m \mid \exists n \in \mathbb{N}(e_n \subseteq x \wedge (n,m) \in graph(f))\}$
$= \{m \mid \exists n \in \mathbb{N}(e_n \subseteq x \wedge m \in f(e_n))\} = \{m \mid m \in f(x)\}$

○

Przykłady w $\mathcal{P}_\omega$ (ćwiczenie)

- $[\![\mathbf{I}]\!] = graph(\mathrm{id}) = \{(n,m) \mid m \in e_n\}$;
- $[\![\mathbf{K}]\!] = \{(m,(k,\ell)) \mid \ell \in e_m\}$;
- $[\![\omega]\!] = \{(x,m) \mid \exists n(e_n \subseteq e_x \wedge (n,m) \in e_x)\}$;
- $[\![\Omega]\!] = \varnothing = \bot$.

○

$\mathcal{P}_\omega$ is not a model of η-conversion

$$\begin{aligned} graph(f) &= \{(n,m) \mid m \in f(e_n)\}; \\ fun(a)(x) &= \{m \mid \exists n \in \mathbb{N}(e_n \subseteq x \wedge (n,m) \in a)\}. \end{aligned}$$

Every $graph(f)$ is infinite: If $(n,m) \in graph(f)$ then also $(k,m) \in graph(f)$, for $e_n \subseteq e_k$. (Thus $graph \circ fun \neq \mathrm{id}_{P_\omega}$.)

Fact: $\mathcal{P}_\omega$ is not a model of η-conversion: $\mathcal{P}_\omega \not\models x = \lambda y.xy$. In particular, $\mathcal{P}_\omega$ is not extensional.

Proof: Let $v(x) = a \neq \bot$, where $a \neq \varnothing$ is finite. Then $[\![x]\!]_v = a$ is finite. But $[\![\lambda y.xy]\!]_v = graph(\ldots)$ is infinite.

○

Theory of $\mathcal{P}_\omega$

Theorem (Hyland)

$$\mathcal{P}_\omega \models M = N \iff BT(M) = BT(N)$$

Trzy własności modeli denotacyjnych

- **Poprawność**: Jeśli $M =_\beta N$, to $[\![M]\!] = [\![N]\!]$.
- **Adekwatność**: Jeśli $[\![M]\!] = [\![N]\!]$, to $M \equiv N$.
- **Pełna abstrakcyjność**: Jeśli $M \equiv N$, to $[\![M]\!] = [\![N]\!]$.

Uwaga: Adekwatność, to „słaba pełność”, a pełna abstrakcyjność, to „silna poprawność”.

Trzy własności modeli denotacyjnych

- **Poprawność**: Jeśli $M =_\beta N$, to $[\![M]\!] = [\![N]\!]$.
- **Adekwatność**: Jeśli $[\![M]\!] = [\![N]\!]$, to $M \equiv N$.
- **Pełna abstrakcyjność**: Jeśli $M \equiv N$, to $[\![M]\!] = [\![N]\!]$.

Uwaga: Model $\mathcal{P}_\omega$ jest poprawny i adekwatny, ale nie jest w pełni abstrakcyjny.

Towards a fully abstract model

A *projection* of B onto A is a pair of continuous functions

$$\varphi : A \to B \quad \text{and} \quad \psi : B \to A,$$

such that

$$\psi \circ \varphi = \mathrm{id}_A \quad \text{and} \quad \varphi \circ \psi \leq \mathrm{id}_B.$$

Then $\varphi(\bot_A) = \bot_B$, because $\varphi(\bot_A) \leq \varphi(\psi(\bot_B)) \leq \bot_B$.

Example

Let D be any cpo. One can assume $D = \{\perp, \top\}$. Functions

$$\varphi_0 : D \to [D \to D] \quad \text{i} \quad \psi_0 : [D \to D] \to D,$$

given by

$$\varphi_0(d)(a) = d, \quad \text{oraz} \quad \psi_0(f) = f(\perp)$$

make a projection of $[D \to D]$ onto D.

Raising a projection

Let (φ, ψ) be a projection of B onto A.
Then (φ^*, ψ^*) is a projection of $[B \to B]$ onto $[A \to A]$:

$$\varphi^*(f) = \varphi \circ f \circ \psi \quad \text{and} \quad \psi^*(g) = \psi \circ g \circ \varphi,$$

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\varphi"] & B \\
A \arrow[u, "f"] & B \arrow[l, "\psi"] \arrow[u, dashed]
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, dashed] & B \arrow[d, "g"] \\
A & B \arrow[l, "\psi"]
\end{tikzcd}$$

Towards D_∞

Take any fixed D_0, for instance $D_0 = \{\perp, \top\}$.

Define by induction $D_{n+1} = [D_n \to D_n]$.

Define projections (φ_n, ψ_n) of D_{n+1} onto D_n by induction:

$$(\varphi_{n+1}, \psi_{n+1}) = (\varphi_n^*, \psi_n^*).$$

Two-way transmission:

$$D_0 \xrightarrow{\varphi_0} D_1 \xrightarrow{\varphi_1} D_2 \xrightarrow{\varphi_2} \cdots$$
$$D_0 \xleftarrow{\psi_0} D_1 \xleftarrow{\psi_1} D_2 \xleftarrow{\psi_2} \cdots$$

Scott's D_∞

Thread: a sequence $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, with $x_n \in D_n$ and $x_n = \psi_n(x_{n+1})$.

$$x_0 \xleftarrow{\psi_0} x_1 \xleftarrow{\psi_1} x_2 \xleftarrow{\psi_2} \cdots$$

Denote the set of all threads by D_∞. Ordering:

$$x \leq y \quad \text{iff} \quad \forall n \in \mathbb{N}(x_n \leq y_n).$$

Fact: The set D_∞ is a cpo.

Proof: For directed $X \subseteq D_\infty$ take $X_n = \{x_n \mid x \in X\}$.
Then $(\sup X_n)_n$ is a thread and $(\sup X_n)_n = \sup X$.

Scott's D_∞

Thread: a sequence $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, with $x_n \in D_n$ and $x_n = \psi_n(x_{n+1})$.

$$x_0 \xleftarrow{\psi_0} x_1 \xleftarrow{\psi_1} x_2 \xleftarrow{\psi_2} \cdots$$

Denote the set of all threads by D_∞. Ordering:

$$x \le y \quad \text{iff} \quad \forall n \in \mathbb{N}(x_n \le y_n).$$

Convention:

$$D_0 \subseteq D_1 \subseteq D_2 \subseteq \cdots \subseteq D_\infty,$$

Element $x \in D_n$ identified with an almost constant thread.

○

Application

$$x \cdot y = \sup\{x_{n+1}(y_n) \mid n \in \mathbb{N}\}$$

Fact: *Application is a continuous function.*

Proof: One shows continuity wrt both arguments.

N.B. The sequence $x_{n+1}(y_n)$ does not have to form a thread. But it is monotone: $x_n(y_{n-1}) \le x_{n+1}(y_n)$, and has a supremum.

○

Some properties

- Every thread is mononotone: $x_0 \le x_1 \le x_2 \le \dots$ and $x = \sup x_n$.
- The bottom is unique: $\bot_{D_0} = \bot_{D_n} = \bot_{D_\infty}$.
- If $x \in D_{n+1}$ then $x \cdot y = x(y_n)$. If also $y \in D_n$, then $x \cdot y = x(y)$.
- If $y \in D_n$ then $(x \cdot y)_n = x_{n+1}(y)$.
- Always $(x \cdot \bot)_0 = x_0$.

Proofs happily omitted.

○

Extensionality

Lemma

If $x \cdot z = y \cdot z$, for all z, then $x = y$.

Proof.

One shows that

if $\forall z \in D_\infty(x \cdot z \le y \cdot z)$ *then* $x_n \le y_n$, *for all n.*

Induction. Begin with $x_0 = (x \cdot \bot)_0 \le (y \cdot \bot)_0 = y_0$.

Then $x_{n+1}(z) = (x \cdot z)_n \le (y \cdot z)_n = y_{n+1}(z)$, for $z \in D_n$. □

○

Scott's D_∞ model

Theorem

The cpo D_∞ is reflexive.

Proof.

Define $F : D_\infty \to [D_\infty \to D_\infty]$ by $F(x)(y) = x \cdot y$.

We know that F is continuous and injective.

Take any $f \in [D_\infty \to D_\infty]$.
Define $f^{(n)} : D_n \to D_n$ by $f^{(n)}(y) = f(y)_n$, for $y \in D_n$.
The sequence $f^{(n)}$ is monotone. Define $G(f) = \sup_n f^{(n)}$.
Then $F(G(f)) = f$. Details omitted. $\square$

Scott's D_∞ model

Corollary

The cpo D_∞ is an extensional lambda-model.
It is isomorphic to $[D_\infty \to D_\infty]$.

Twierdzenie (Hyland, Wadsworth)

The model D_∞ is adequate and fully abstract:
Terms M i N are observationally equivalent iff $\mathcal{D}_\infty \models M = N$.

Ściślej:

Twierdzenie (Hyland, Wadsworth)

Następujące warunki są równoważne:

1. *Termy M i N są obserwacyjnie równoważne.*
2. $BT(M) \approx_\eta BT(N)$.
3. $\mathcal{D}_\infty \models M = N$.

Implikacja (1) $\Rightarrow$ (2) to w istocie twierdzenie Böhma.
Udowodnimy (3) $\Rightarrow$ (1) (adekwatność) i (2) $\Rightarrow$ (3).
Stąd wynika (1) $\Rightarrow$ (3), czyli pełna abstrakcyjność.

Definicje

Napis $B \sqsubseteq B'$ oznacza, że B' powstaje z B przez wstawienie jakichś poddrzew w miejsca, w których w B występuje Ω.

Relacja $B \preceq_\eta B'$ zachodzi gdy istnieje (skończony lub nie) ciąg eta-ekspansji

$$B = B_0 \; {}_\eta\!\leftarrow B_1 \; {}_\eta\!\leftarrow B_2 \; {}_\eta\!\leftarrow B_3 \; {}_\eta\!\leftarrow \cdots$$

zbieżny do B'. Zatem:

$$B \approx_\eta B' \quad\Leftrightarrow\quad B \preceq_\eta B'' \, {}_\eta\!\succeq B' \text{ dla pewnego } B''$$

Aproksymanty

Aproksymant to skończone drzewo Böhma (term w postaci normalnej), w którym może występować stała Ω).

Przyjmujemy, że $[\![\Omega]\!] = \bot$

Zbiór *aproksymantów termu M*:

$$A(M) = \{A \mid A \text{ jest aproksymantem oraz } A \sqsubseteq M\}$$

Twierdzenie o aproksymacji:

$$[\![M]\!]_\rho = \sup\{[\![A]\!]_\rho \mid A \in A(M)\}.$$

Dowód: Kiedy indziej.

Tw. o aproksymacji: $[\![M]\!]_\rho = \sup\{[\![A]\!]_\rho \mid A \in A(M)\}$.

Wniosek: *Term M jest rozwiązalny wtedy i tylko wtedy, gdy $[\![M]\!]_\rho \neq \bot$, dla pewnego ρ.*

Dowód: ($\Rightarrow$) Jeśli $M =_\beta \lambda x_1 \ldots x_n.\, y\vec{N}$, gdzie y wolne, to $[\![M]\!]_\varrho \neq \bot$, dla $\rho(y) = \lambda\!\!\lambda\vec{a}.d$, gdzie $d \neq \bot$.

Jeśli $M =_\beta \lambda x_1 \ldots x_n.\, x_i\vec{N}$, to nalezy użyć $\lambda\!\!\lambda\vec{a}.d$ jako i-tego argumentu.

($\Leftarrow$) Wtedy z tw. o aproksymacji istnieje nietrywialny aproksymant, czyli jest czołowa postać normalna.

Adekwatność

Twierdzenie:

Jeśli $\mathcal{D}_\infty \models M = N$, to $M \equiv N$.

Dowód: Jeśli $[\![M]\!]_\rho = [\![N]\!]_\rho$ to także $[\![C[M]]\!]_\rho = [\![C[N]]\!]_\rho$.

Jeśli jedno jest różne od $\bot$, to i drugie. Zatem jeśli jedno rozwiązalne to i drugie.

Lemat

Lemat: *Niech $T_1 \preceq_\eta T_2$. Wtedy:*

- *Jeśli $A \in A(T_1)$, to istnieje takie $B \in A(T_2)$, że $B \twoheadrightarrow_\eta A$.*
- *Jeśli $B \in A(T_2)$, to istnieje takie $A \in A(T_1)$, że $B \twoheadrightarrow_\eta A$.*

Dowód: W nieskończonym ciągu eta-ekspansji od T_1 do T_2 tylko skończenie wiele kroków dotyczy wierzchołków drzewa T_1 które należą do aproksymanta A. Te eta-ekspansje przekształcają A w pewnego aproksymanta drzewa T_2.

W przeciwnym kierunku analogicznie.

Wniosek

Lemat: *Niech $T_1 \preceq_\eta T_2$. Wtedy:*

- *Jeśli $A \in A(T_1)$, to istnieje takie $B \in A(T_2)$, że $B \twoheadrightarrow_\eta A$.*
- *Jeśli $B \in A(T_2)$, to istnieje takie $A \in A(T_1)$, że $B \twoheadrightarrow_\eta A$.*

Wniosek:

Jeśli przyjmiemy, że $[\![T]\!]_\rho = \sup\{[\![A]\!]_\rho \mid A \in A(T)\}$,
to z $T_1 \preceq_\eta T_2$ wynika $[\![T_1]\!]_\rho = [\![T_2]\!]_\rho$, dla każdego ρ.

○

Pełna abstrakcyjność

Twierdzenie: *Jeśli $M \equiv N$, to $[\![M]\!] = [\![N]\!]$*

Dowód: Skoro $M \equiv N$, to $BT(M) \approx_\eta BT(N)$, czyli $BT(M) \preceq_\eta T \,{}_\eta\!\succeq BT(N)$.

Z poprzedniego lematu wynika $[\![BT(M)]\!]_\rho = [\![BT(N)]\!]_\rho$.

Ale $[\![M]\!]_\rho = [\![BT(M)]\!]_\rho$ i $[\![N]\!]_\rho = [\![BT(N)]\!]_\rho$ na mocy twierdzenia o aproksymacji.

Zatem także $[\![M]\!]_\rho$ i $[\![N]\!]_\rho$ muszą być równe.

○