Rachunek lambda

11 marca 2013

Zbiory i funkcje

Sposób użycia:

$a \in A$	(należenie)	$F(a)$	(aplikacja)

Tworzenie:

$\{x \mid W(x)\}$	(wycinanie)	$\lambda x\, W(x)$	(abstrakcja)

Ewaluacja:

$a \in \{x \mid W(x)\} \quad \Leftrightarrow \quad W(a) \qquad (\lambda x\, W(x))(a) = W(a)$

Ekstensjonalność (?)

Dla zbiorów (niewątpliwa):

$A = B$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\forall x\,(x \in A \Leftrightarrow x \in B)$

$$A = \{x \mid x \in A\}$$

Dla funkcji (wątpliwa):

$F = G$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\forall x\,(F(x) = G(x))$

$$F = \lambda x\, Fx \quad ({}^{1})$$

[1] Gdy F nie zawiera x.

Ekstensjonalność (?)

Statyczne i dynamiczne rozumienie funkcji:

1. Jako przyporządkowanie, wykres, relację, zbiór par...
2. Jako regułę, przekształcenie, algorytm, metodę...

Teoria zbiorów nie nadaje się do opisu aspektu (2).

Beztypowy rachunek lambda

- Funkcja rozumiana jako działanie.
- Przedmiotem działania może być cokolwiek, zatem...
- ...funkcja nie ma a priori ograniczonej dziedziny.
- Funkcja może być np. aplikowana sama do siebie.
- Każdemu obiektowi można przypisać działanie, więc...
- ...nie ma innych obiektów niż funkcje.

Analogia: Każdy ciąg bitów można zinterpretować
– jako program;
– jako dane.

Składnia: lambda-wyrażenia

Lambda-wyrażenia:

– Zmienne x, y, z, ...

– Aplikacje (MN);

– Abstrakcje $(\lambda x\, M)$.

Konwencje:

– Opuszczamy zewnętrzne nawiasy;

– Aplikacja wiąże w lewo: MNP oznacza $(MN)P$

– Skrót z kropką: $\lambda x_1 \dots x_n.M$ oznacza $\lambda x_1(\dots(\lambda x_n M)\cdots)$.

Przykłady

$$
\begin{aligned}
\mathsf{I} &= \lambda x.x \\
\mathsf{K} &= \lambda xy.x \\
\mathsf{S} &= \lambda xyz.xz(yz) \\
\mathsf{2} &= \lambda fx.\, f(fx) \\
\omega &= \lambda x.xx \\
\Omega &= \omega\omega \\
\mathsf{Y} &= \lambda f((\lambda x.f(xx))(\lambda x.f(xx)))
\end{aligned}
$$

Zmienne *wolne* (globalne)

$\mathrm{FV}(x) = \{x\}$;

$\mathrm{FV}(MN) = \mathrm{FV}(M) \cup \mathrm{FV}(N)$;

$\mathrm{FV}(\lambda x\, M) = \mathrm{FV}(M) - \{x\}$.

Na przykład:

$\mathrm{FV}(\lambda x\, x) = \varnothing$;

$\mathrm{FV}(\lambda x.\, xy) = \{y\}$;

$\mathrm{FV}((\lambda x.\, xy)(\lambda y.\, xy)) = \{x, y\}$.

Alfa-konwersja

Wyrażenia $\lambda x.\, xy$ i $\lambda z.\, zy$ oznaczają tę samą operację („zaaplikuj dany argument do y”).

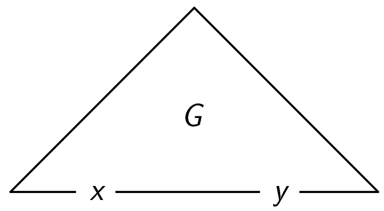
Należy je uważać za identyczne.

Alfa-konwersja: Wyrażenia różniące się tylko wyborem zmiennych związanych utożamiamy.

Lambda-termy to klasy abstrakcji tego utożsamienia.

Łatwiej powiedzieć, niż zrobić. . .

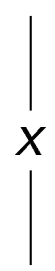
Termy jako grafy:



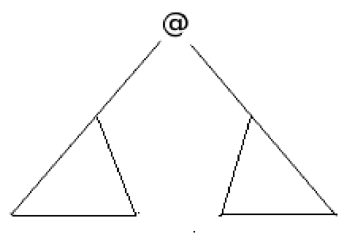
– Jeden wierzchołek początkowy;

– Zmienne wolne jako wierzchołki końcowe (liście).

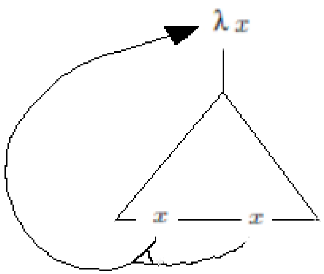
Termy jako grafy: zmienna



Termy jako grafy: aplikacja

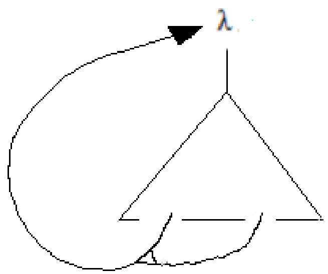


Termy jako grafy: abstrakcja

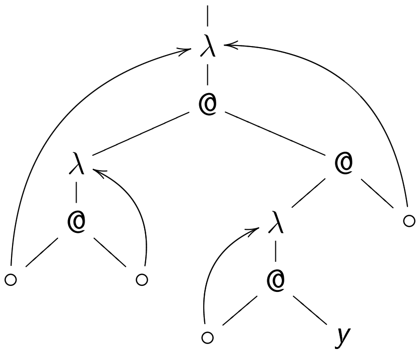


Termy jako grafy: abstrakcja

Zmienne związane sa niepotrzebne.



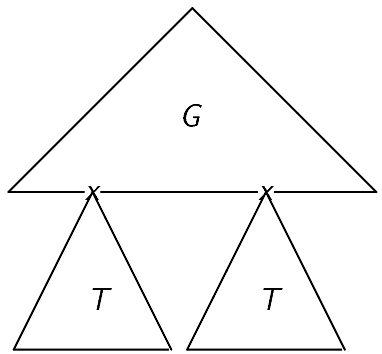
Przykład



To jest graf termu $\lambda x.(\lambda y.\, xy)((\lambda z.\, zy)x)$

Podstawienie $G[x := T]$

Podstawienie termu T do termu G w miejsce wolnych wystąpień zmiennej x.



Podstawienie

- $x[x := N] = N$;
- $y[x := N] = y$,
  gdy y jest zmienną różną od x;
- $(PQ)[x := N] = P[x := N]Q[x := N]$;
- $(\lambda y\, P)[x := N] = \lambda y.P[x := N]$,
  gdy $y \neq x$ oraz $y \notin \mathrm{FV}(N)$.

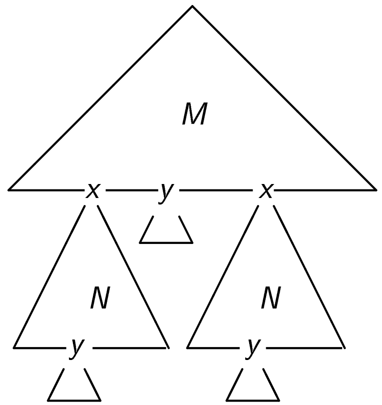
Wykonanie podstawienia na konkretnej reprezentacji termu może wymagać wymiany zmiennych:

$(\lambda y\, P)[x := N] = \lambda z\, P[y := z][x := N]$, gdzie z jest „nowe”.

Lemat o podstawieniu

$$M[x := N][y := R] = M[y := R][x := N[y := R]]$$

gdy $x \notin \mathrm{FV}(R)$ lub $y \notin \mathrm{FV}(M)$



Beta-redukcja

Najmniejsza relacja $\to_\beta$, spełniająca warunki:

- $(\lambda x P)Q \to_\beta P[x := Q]$;
- jeśli $M \to_\beta M'$, to:
  $MN \to_\beta M'N$, $NM \to_\beta NM'$ oraz $\lambda x M \to_\beta \lambda x M'$.

Term postaci $(\lambda x P)Q$ to *β-redeks*.

Relacja $\to_\beta$ to zredukowanie jednego dowolnego redeksu.

Relacje pochodne:

Dowolna liczba kroków: $\twoheadrightarrow_\beta$ lub $\to_\beta^*$;

Niezerowa liczba kroków: $\to_\beta^+$;

Co najwyżej jeden krok: $\to_\beta^=$;

Równoważność (beta-konwersja): $=_\beta$.

Przykład: $\mathsf{SKK} =_\beta \mathsf{I}$

$$\begin{aligned}\mathsf{SKK} &= (\lambda xyz.xz(yz))(\lambda xy.x)(\lambda xy.x)\\ &\to_\beta (\lambda yz.(\lambda xy.x)z(yz))(\lambda xy.x)\\ &\to_\beta \lambda z.(\lambda xy.x)z((\lambda xy.x)z)\\ &\to_\beta \lambda z.(\lambda y.z)((\lambda xy.x)z)\\ &\to_\beta \lambda z.(\lambda y.z)(\lambda y.z)\\ &\to_\beta \lambda z.z = \mathsf{I}\end{aligned}$$

○

Jaja aligatorów

http://worrydream.com/AlligatorEggs/

Rachunek lambda jako teoria równościowa

Termy M i N są beta-równe ($M =_\beta N$) wtedy i tylko wtedy, gdy równość „$M = N$" można udowodnić w systemie:

$$(\beta)\quad (\lambda x\, M)N = M[x := N] \qquad\qquad x = x$$

$$\frac{M = N}{MP = NP} \qquad \frac{M = N}{PM = PN} \qquad (\xi)\ \frac{M = N}{\lambda x\, M = \lambda x\, N}$$

$$\frac{M = N}{N = M} \qquad\qquad \frac{M = N, N = P}{M = P}$$

○

Normalizacja

Postać normalna to term bez redeksów.

Nie da się go redukować.

Term M *ma postać normalną* (*jest normalizowalny*), gdy redukuje się do pewnej postaci normalnej.

Nazywamy ją *postacią normalną* termu M.

Term M jest *silnie normalizowalny* ($M \in \mathrm{SN}$), gdy nie istnieje nieskończony ciąg

$$M = M_0 \to_\beta M_1 \to_\beta M_2 \to_\beta \cdots$$

Inaczej: każdy ciąg redukcji prowadzi do postaci normalnej.

○

Przykłady

- Term $\mathbf{S} = \lambda xyz.xz(yz)$ jest w postaci normalnej.
- Term $\mathbf{SKK}$ jest silnie normalizowalny i ma postać normalną $\mathbf{I}$.
- Term $\mathbf{\Omega} = (\lambda x.\, xx)(\lambda x.\, xx)$ nie ma postaci normalnej.
- Term $(\lambda x.\, y)\mathbf{\Omega}$ ma postać normalną y, ale nie jest silnie normalizowalny.

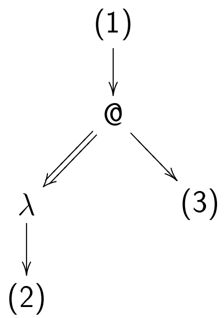
Wołanie przez nazwę

$$(\lambda x P)Q \to_\beta P[x := Q]$$

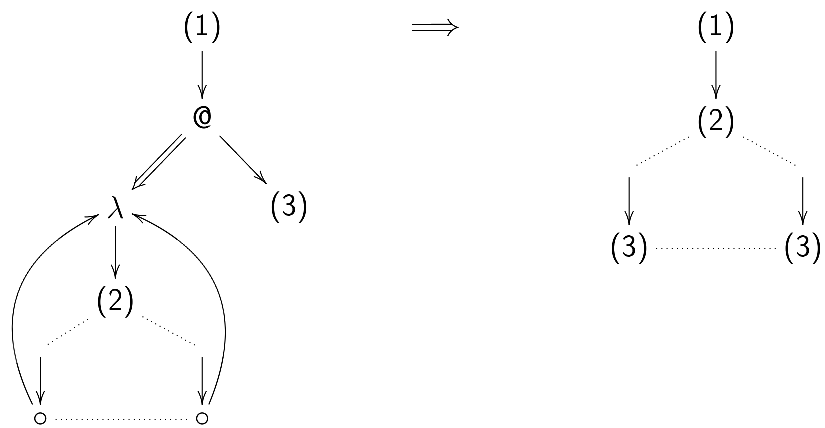
Ewaluacja procedury o parametrze formalnym x i treści P, gdy parametrem aktualnym jest Q:

Należy wstawić parametr aktualny do treści procedury, wymieniając, jeśli trzeba, lokalne identyfikatory na nowe.

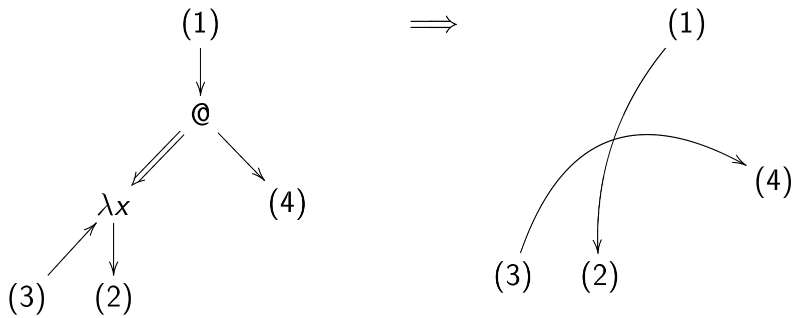
Beta-redeks w grafie



Beta-redukcja w grafie



Beta-redukcja nieco wyidealizowana



Kompozycjonalność

Lemat

(1) Jeśli $M \to_\beta M'$, to $M[x := N] \to_\beta M'[x := N]$;

(2) Jeśli $N \to_\beta N'$, to $M[x := N] \twoheadrightarrow_\beta M[x := N']$,

Dowód: Indukcja ze względu na długość M. $\square$

Wniosek

Jeśli $M \twoheadrightarrow_\beta M'$ i $N \twoheadrightarrow_\beta N'$, to $M[x := N] \twoheadrightarrow_\beta M'[x := N']$.

Własność Churcha-Rossera (CR)

Jeśli $a \twoheadrightarrow b$ i $a \twoheadrightarrow c$, to istnieje takie d, że $b \twoheadrightarrow d$ i $c \twoheadrightarrow d$.

$$\begin{tikzcd} & a \arrow[dl, two heads] \arrow[dr, two heads] & \\ b \arrow[dr, two heads, dashed] & & c \arrow[dl, two heads, dashed] \\ & d & \end{tikzcd}$$

Twierdzenie Churcha-Rossera: Beta ma własność CR

Relacja pomocnicza $\xrightarrow{1}$

- $x \xrightarrow{1} x$, gdy x jest zmienną;
- jeśli $M \xrightarrow{1} M'$, to $\lambda x M \xrightarrow{1} \lambda x M'$;
- jeśli $M \xrightarrow{1} M'$ i $N \xrightarrow{1} N'$, to:

  $MN \xrightarrow{1} M'N'$, oraz

  $(\lambda x M)N \xrightarrow{1} M'[x := N']$.

Sens: jednoczesna redukcja kilku redeksów już obecnych w termie.

Pełne rozwinięcie

Term $M^\bullet$ to *pełne rozwinięcie* termu M.

– $x^\bullet = x$;
– $(\lambda x\, M)^\bullet = \lambda x\, M^\bullet$;
– $(MN)^\bullet = M^\bullet N^\bullet$, gdy M nie jest abstrakcją;
– $((\lambda x\, M)N)^\bullet = M^\bullet[x := N^\bullet]$.

Sens: jednoczesna redukcja wszystkich istniejących redeksów.

Własności relacji $\xrightarrow{1}$

(1) Jeśli $M \xrightarrow{1} M'$, to $\mathrm{FV}(M') \subseteq \mathrm{FV}(M)$.

(2) Dla dowolnego M zachodzi $M \xrightarrow{1} M$ oraz $M \xrightarrow{1} M^\bullet$.

(3) Jeśli $M \xrightarrow{1} M'$ i $N \xrightarrow{1} N'$, to $M[x := N] \xrightarrow{1} M'[x := N']$.

(4) Jeśli $M \xrightarrow{1} M'$, to $M' \xrightarrow{1} M^\bullet$.

Relacja $\xrightarrow{1}$ ma własność rombu

$$\begin{tikzcd}
 & M \arrow[dl, "1"'] \arrow[dr, "1"] & \\
M' \arrow[dr, dashed, "1"'] & & M'' \arrow[dl, dashed, "1"] \\
 & M^\bullet &
\end{tikzcd}$$

Dowód twierdzenia Churcha-Rossera

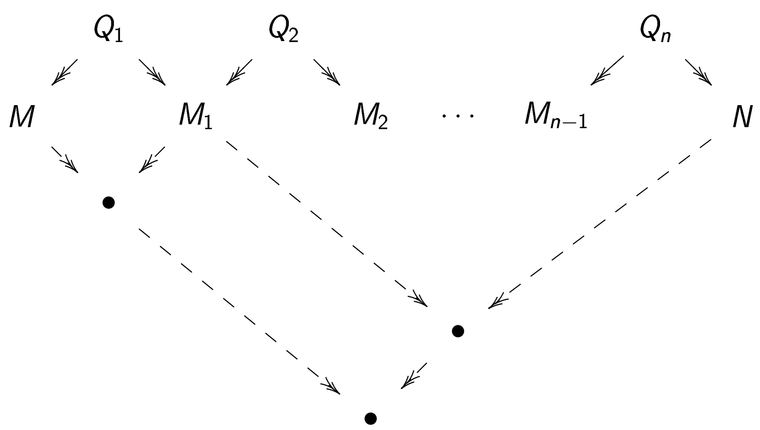
1) Ponieważ relacja $\xrightarrow{1}$ ma własność rombu, więc tym bardziej jej domknięcie przechodnio-zwrotne $\overset{1}{\twoheadrightarrow}$ ma własność rombu.

$$\begin{tikzcd}
M_1 \arrow[r] \arrow[d] & \cdot \arrow[r] \arrow[d, dotted] & \cdot \arrow[r] \arrow[d, dotted] & M_2 \arrow[d, dotted] \\
\cdot \arrow[r, dotted, no head] \arrow[d] & \cdot \arrow[r, dotted] \arrow[d, dotted] & \cdot \arrow[r, dotted] \arrow[d, dotted] & \cdot \arrow[d, dotted] \\
M_3 \arrow[r, dotted] & \cdot \arrow[r, dotted] & \cdot \arrow[r, dotted] & M_4
\end{tikzcd}$$

2) Ponieważ $\to_\beta \subseteq \xrightarrow{1} \subseteq \twoheadrightarrow_\beta$, więc $\overset{1}{\twoheadrightarrow}$ i $\twoheadrightarrow_\beta$ są równe.
3) Własność rombu dla $\twoheadrightarrow_\beta$ to własność CR dla $\to_\beta$.

Wnioski z twierdzenia Churcha-Rossera

(1) *Jeśli* $M =_\beta N$, *to* $M \twoheadrightarrow_\beta Q\,{}_\beta\!\twoheadleftarrow N$, *dla pewnego* Q.



Wnioski z twierdzenia Churcha-Rossera

(2) *Każdy term ma co najwyżej jedną postać normalną (i do niej się redukuje).*

Dowód:
Jeśli $M =_\beta N$ i N normalne, to $M \twoheadrightarrow_\beta Q\,{}_\beta\!\twoheadleftarrow N$.
Skoro N normalne, to $N = Q$.
Jeśli M też normalne, to $M = Q = N$.

Wnioski z twierdzenia Churcha-Rossera

(3) *Beta-konwersja jest niesprzeczną teorią równościową*

Dowód: Na przykład $\nvdash x = y$, ponieważ $x \neq_\beta y$.

Eta-reduction

The least relation $\to_\eta$, satisfying the conditions:

- $\lambda x.Mx \to_\eta M$, when $x \notin \mathrm{FV}(M)$;
- jeśli $M \to_\eta M'$, to $MN \to_\eta M'N$, $NM \to_\eta NM'$ and $\lambda xM \to_\eta \lambda xM'$.

Symbol $\to_{\beta\eta}$ stands for the union of relations $\to_\beta$ and $\to_\eta$.

Other definitions and notation are applicable respectively.

Eta-reduction

Fakt

Eta-reduction is strongly normalizing (because terms shrink under eta).

Fakt

Beta-eta-reduction is Church-Rosser.

Standardization

Standard reduction: Always reduce the leftmost redex.

Theorem:

If M has a β-normal form then the leftmost reduction leads to the normal form.

Slogan:
The leftmost *reduction strategy* is normalizing.

Head normalization

A term $\lambda\vec{x}.z\vec{R}$ is in *head normal form*.

A term $\lambda\vec{x}.(\lambda y.P)Q\vec{R}$ has a *head redex* $(\lambda y.P)Q$.

A reduction step of the form

$$M = \lambda\vec{x}.(\lambda y.P)Q\vec{R} \to_\beta \lambda\vec{x}.P[y := Q]\vec{R} = N$$

is called *head reduction*. Write $M \xrightarrow{\mathrm{h}} N$.

Other reductions are *internal*. Write $M \xrightarrow{\mathrm{i}} N$.

Main Lemma

Lemma: If $M \twoheadrightarrow_\beta N$ then $M \overset{\mathrm{h}}{\twoheadrightarrow} P \overset{\mathrm{i}}{\twoheadrightarrow} N$, for some P.

Warning: A naive proof attempt fails. This diagram is wrong.

$$\begin{tikzcd} & \cdot \arrow[dr, "h"] & \\ \cdot \arrow[ur, two heads, "i"] \arrow[dr, dashed, "h"'] & & \cdot \\ & \cdot \arrow[ur, dashed, two heads, "i"'] & \end{tikzcd}$$

Curry's fixed point combinator $\mathbf{Y}$

$$\mathbf{Y} = \lambda f((\lambda x.f(xx))(\lambda x.f(xx))$$

Fact: $\mathbf{Y}F =_\beta F(\mathbf{Y}F)$, for every F.

Proof: $\mathbf{Y}F \to_\beta ((\lambda x.F(xx))(\lambda x.F(xx)) \to_\beta$
$F((\lambda x.F(xx))(\lambda x.F(xx))_\beta \leftarrow F(\mathbf{Y}F)$

$\mathbf{Y}F =_\beta F(\mathbf{Y}F)$

Example: Find an M such that $Mxy =_\beta MxxyM$.

Solution: No problem, $M = \mathbf{Y}(\lambda m\, \lambda xy.\, mxxym)$.

Turing's fixed-point combinator

$$\mathbf{\Theta} = (\lambda xf.\, f(xxf))(\lambda xf.\, f(xxf))$$

Fact: $\mathbf{\Theta}F \twoheadrightarrow_\beta F(\mathbf{\Theta}F)$, all F.

Proof: $\mathbf{\Theta}F = (\lambda xf.\, f(xxf))(\lambda xf.\, f(xxf))F \to_\beta$
$(\lambda f.\, f((\lambda xf.\, f(xxf))(\lambda xf.\, f(xxf))f)F \to_\beta$
$F((\lambda xf.\, f(xxf))(\lambda xf.\, f(xxf))F) = F(\mathbf{\Theta}F)$